

# Un Algoritmo para Resolver la Cinemática Directa de Plataformas Gough-Stewart Tipo 6-3

*An Algorithm to Solve Forward Kinematics Gough Stewart 6-3 Platforms*

J. Gallardo-Alvarado, J.M. Rico-Martínez y H. Orozco-Mendoza

Departamento de Ingeniería Mecánica

Instituto Tecnológico de Celaya

38010 Celaya, Gto., México

Tel: +52 (461)6117575, Fax: +52 (461)6117979

{gjaime,mrico,horacio}@itc.mx

*Article received on June 06, 2002; accepted on July 30, 2004*

## Resumen

Un algoritmo para resolver la cinemática directa, hasta el análisis de aceleración, de una plataforma Gough-Stewart con una topología especial, conocida como tipo 6-3, es introducido en este trabajo. El análisis directo de posición se lleva a efecto aplicando simple conceptos geométricos que conducen a un sistema no lineal de tres ecuaciones con tres incógnitas, el cual se resuelve por medio del método de Newton-Raphson. Las propiedades de la forma de Klein, una forma simétrica bilineal o producto interno del álgebra de Lie  $\mathfrak{e}(3)$ , permiten obtener expresiones simples y compactas para el cálculo de la velocidad angular y de la aceleración angular de la plataforma móvil con respecto a la plataforma fija. Para este fin, el estado de velocidad, o el giro sobre un tornillo (Ball 1900), y el estado de aceleración reducida de la plataforma móvil se expresan en forma de tornillos a través de cada una de las seis cadenas serie del manipulador paralelo. Con la ayuda del programa de computadora Maple© se resuelve un ejemplo numérico, y los resultados numéricos así generados se validan con el programa de análisis ADAMS©.

**Palabras Clave:** Plataforma paralela, Análisis de aceleración, Forma de Klein, Teoría de tornillos, Cinemática.

## Abstract

An algorithm for solving the forward kinematics, up to the acceleration analysis, of a Gough Stewart platform with a special topology, namely type 6-3, is introduced in this work. The forward position analysis is carried out by applying simple geometric procedures that leads to a non-linear system of three equations with three unknowns, which is solved by means of the Newton-Raphson method. Afterwards, the properties of the Klein form, a bilinear symmetric form or inner product of the Lie algebra  $\mathfrak{e}(3)$ , allow to obtain simple and compact expressions for the computation of the angular velocity and the angular acceleration of the moving platform with respect to the fixed platform. To this end, the velocity state, or the twist about a screw (Ball 1900), and the reduced acceleration state of the moving platform are expressed in screw form through each one of the six limbs of the parallel manipulator. With the aid of special software like Maple a numerical example is solved, and the numerical results so obtained are validated with the software of analysis ADAMS ©.

**Keywords:** Parallel platform, Acceleration Analysis, Klein form, Screw Theory, Kinematics.

## 1 Introducción

Una plataforma general Gough-Stewart se compone de un órgano terminal, denominado plataforma móvil, y un eslabón base, denominado plataforma fija, unidos por medio de seis cadenas serie las cuáles se accionan de manera independiente.

En comparación con los manipuladores serie, los manipuladores paralelos poseen una gran rigidez en su estructura y por lo tanto tienen una gran capacidad de carga, por otra parte puesto que no existe acumulación de errores sobre la plataforma móvil entonces es posible obtener una mejor precisión. A cambio de estas ventajas, los manipuladores paralelos poseen un espacio de trabajo sumamente limitado. No obstante su pobre dexteridad, los manipuladores paralelos tienen aplicaciones interesantes como lo son los centros de maquinado por control numérico y los robots caminantes.

En 1956 Gough propuso un mecanismo paralelo para pruebas de durabilidad en neumáticos sometidos a diferentes condiciones de carga. Posteriormente, en 1965 Stewart propuso el esquema de un simulador de vuelo basado en un mecanismo paralelo. De esta manera, en la actualidad los manipuladores paralelos que utilizan arquitecturas semejantes a las propuestas por Gough y Stewart se conocen como plataformas de Gough-Stewart, Merlet (1999).

Algunas de las desventajas de una plataforma general Gough-Stewart, es decir de seis grados de libertad, son las siguientes:

- El análisis directo de posición, un paso inevitable en el dimensionado mecánico de los componentes del manipulador, es una tarea compleja que conduce a cuarenta posibles soluciones reales (Raghavan 1993; Innocenti 1998). De esta manera el *controlador* requiere de información adicional, por medio de sensores, sobre la ubicación instantánea de la plataforma móvil.
- La presencia de singularidades locales, Di Gregorio (2002), es un problema recurrente que limita al espacio de trabajo.
- Como consecuencia del punto anterior, la manipulabilidad o dexteridad del mecanismo es extremadamente cuestionable

A fin de simplificar el análisis directo de posición e incrementar el espacio de trabajo y con ello la dexteridad del manipulador, la plataforma Gough-Stewart se puede modificar de tal forma que dos cadenas serie o extremidades tengan un par esférico común, dando lugar a lo que se conoce como un manipulador paralelo Gough-Stewart tipo 6-3. Cabe mencionar que con dicho arreglo se conservan los seis grados de libertad del mecanismo.

En Ku (2000) se aborda el análisis cinemático de un manipulador Gough-Stewart tipo 6-3. Sin embargo dicho trabajo se limita al análisis directo de posición y se fundamenta en el cálculo de los ángulos de inclinación de las extremidades, lo cual dificulta su interpretación.

El presente trabajo se enfoca precisamente al análisis cinemático directo, incluyendo los análisis de velocidad y de aceleración, de una plataforma Gough-Stewart tipo 6-3.

El análisis directo de posición se resuelve aplicando matrices homogéneas de transformación, en combinación con ecuaciones de compatibilidad, con lo que se genera un sistema no lineal de tres ecuaciones con tres incógnitas el cual se resuelve vía el método de Newton- Raphson. Más aún, a diferencia de la contribución de Ku (2000), el análisis directo de posición propuesto en la presente contribución se fundamenta en el cálculo de las coordenadas, de acuerdo a un sistema global de referencia, de los pares esféricos del manipulador, ello hace suponer que se obtiene una interpretación más clara de los resultados generados.

Una vez que se ha resuelto el análisis de posición, el estado de velocidad de la plataforma móvil, con respecto a la plataforma fija, se expresa en forma de tornillos infinitesimales a través de cada una de las seis cadenas serie. La aplicación sistemática de la forma de Klein entre una línea en coordenadas de Plucker a lo largo de cada extremidad y el estado de velocidad, escrito en forma de tornillos infinitesimales y como un vector de seis dimensiones, conduce a una expresión simple y compacta que permite obtener el estado de velocidad de la plataforma móvil en términos de las velocidades generalizadas y de las coordenadas de Plucker de cada una de las seis líneas, siendo de especial interés el cálculo de la velocidad angular de la plataforma móvil. De manera similar se resuelve el análisis directo de aceleración.

Finalmente, la metodología se implementó en un programa de computadora en Maple©, y se aplicó en un ejemplo numérico. Con el objeto de validar los resultados numéricos, se generó un modelo en el programa de análisis dinámico ADAMS©.

## 2 Conceptos Preliminares sobre Teoría de Tornillos

Un tornillo infinitesimal,  $\$$ , es un vector de seis dimensiones que consta de una componente primaria,  $P(\$) = s$ , y una componente dual,  $D(\$) = s_o$ , dado por

$$\$ = \begin{bmatrix} s \\ s_o \end{bmatrix},$$

donde  $s$  es un vector unitario a lo largo del eje instantáneo del tornillo mientras que  $s_O$  es el momento producido por el vector  $s$  de acuerdo a un vector  $r_{O/P}$ , el cual inicia en un punto  $P$  del eje instantáneo de tornillo y termina en el punto de referencia  $O$ . El par momento se determina como

$$s_O = hs + s \times r_{O/P} ,$$

donde  $h$  es el paso del tornillo. El álgebra de Lie,  $e(3)$ , puede considerarse como el álgebra de los elementos infinitesimales del grupo Euclídeo,  $E(3)$ , y es isomórfica al álgebra de tornillos, frecuentemente denominada álgebra de motores, en la que se satisfacen las siguientes operaciones.

Sean  $\$1 = (s_1, s_{O1})$ ,  $\$2 = (s_2, s_{O2})$  y  $\$3 = (s_3, s_{O3})$  elementos del álgebra de Lie  $e(3)$  y sea además  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Entonces

1. Adición,

$$\$1 + \$2 = (s_1 + s_2, s_{O1} + s_{O2}) .$$

2. Multiplicación por un escalar,

$$\lambda \$1 = (\lambda s_1, \lambda s_{O1}) .$$

3. Producto de Lie,

$$[\$1 \quad \$2] = \begin{bmatrix} s_1 \times s_2 \\ s_1 \times s_{O2} - s_2 \times s_{O1} \end{bmatrix} .$$

De esta manera, el álgebra de Lie,  $e(3)$ , es un álgebra no conmutativa, no asociativa que satisface la identidad de Jacobi. Más aún, es posible definir dos formas simétricas bilineales o productos internos.

1. La forma de Killing,

$$Ki : e(3) \times e(3) \rightarrow Ki(\$1, \$2) = s_1 \bullet s_2$$

2. La forma de Klein,

$$KL : e(3) \times e(3) \rightarrow KL(\$1, \$2) = s_1 \bullet s_{O2} + s_2 \bullet s_{O1}$$

donde  $\times$  y  $\bullet$  denotan, respectivamente, al producto cruz y al producto interno del álgebra vectorial convencional de tres dimensiones.

Suponga que un cuerpo rígido posee una velocidad angular  $\omega$  y que un punto  $O$ , fijo al mismo, posee una velocidad  $v_O$  ambos vectores referidos con respecto a otro cuerpo o sistema de referencia. Puesto que con ambos vectores es posible determinar la velocidad de cualquier punto del cuerpo rígido, entonces es totalmente razonable definir al estado de velocidad,  $V$ , del cuerpo rígido como un vector de seis dimensiones de la siguiente manera

$$V = \begin{bmatrix} \omega \\ v_O \end{bmatrix} . \quad (1)$$

La velocidad angular  $\omega$  se conoce como la componente primaria mientras que la velocidad  $v_O$  se conoce como la componente dual. Más aún, a principios del siglo XX Ball (1900) definió al estado de velocidad como el giro sobre un tornillo, esto es

$$V = \omega \$ . \quad (2)$$

Suponga ahora que el cuerpo rígido posee una aceleración angular  $\alpha$  y que el punto  $O$  posee una aceleración  $a_O$ . Brand (1947) definió el estado de aceleración reducida o simplemente, por brevedad, acelerador de un cuerpo rígido,  $A_R$ , como un vector de seis dimensiones dado por

$$A_R = \begin{bmatrix} \alpha \\ a_O - \omega \times v_O \end{bmatrix}, \quad (3)$$

donde,  $\alpha$  es la componente primaria mientras que la composición  $a_O - \omega \times v_O$  es la componente dual.. Nótese que en las expresiones (1) y (3) las componentes primarias no dependen de ningún punto en particular y por lo tanto pueden considerarse propiedades de los cuerpos rígidos. Al contrario, las componentes duales dependen del punto  $O$  de referencia. Más aún, la componente primaria del acelerador se obtiene de manera directa a partir de la componente primaria del estado de velocidad, esto es

$$\alpha = \frac{d}{dt} \omega .$$

Por su parte la deducción de la componente dual del acelerador, a partir del estado de velocidad, es más elusiva. Este procedimiento se aclara si se toma en cuenta que tanto el estado de velocidad como el de aceleración reducida son vectores de seis dimensiones que satisfacen las condiciones de un campo vectorial helicoidal, para detalles consulte Gallardo y Rico (1998).

En un manipulador serie el estado de velocidad del órgano terminal, cuerpo  $m$ , con respecto al eslabón base, cuerpo  $0$ , puede establecerse en términos de los tornillos infinitesimales asociados a los pares cinemáticos y las velocidades relativas,  $\omega$ , como

$${}^0V^m = \sum_{i=0}^{m-1} {}^i\omega_{i+1} {}^i\$^{i+1} . \quad (4)$$

Por su parte el estado de aceleración reducida del órgano terminal, en términos de tornillos infinitesimales, vendrá dado por

$${}^0A_R^m = \sum_{i=0}^{m-1} {}^i\alpha_{i+1} {}^i\$^{i+1} + \$_L , \quad (5)$$

donde, el tornillo de Lie,  $\$_L$ , se determina a partir de los resultados del análisis de velocidad como

$$\$_L = \sum_{i=0}^{m-2} \left[ {}^i\omega_{i+1} {}^i\$^{i+1} - \sum_{j=i+1}^{m-1} {}^j\omega_{j+1} {}^j\$^{j+1} \right] . \quad (6)$$

Las expresiones (4) y (5) son las ecuaciones fundamentales que permiten resolver el análisis cinemático de manipuladores serie y pueden extenderse sin esfuerzo considerable a los análisis de velocidad y de aceleración de cadenas cinemáticas cerradas y por supuesto a los manipuladores paralelos. Para información más detallada de dichas expresiones se sugiere consulte Rico y Duffy (1996).

### 3 Análisis de Posición

El análisis inverso de posición de una plataforma Gough-Stewart es hasta cierto punto una tarea trivial y por lo tanto no tiene sentido incluirlo en la presente contribución. Al contrario, el análisis directo de dicho manipulador es una tarea ardua que requiere de mayor atención.

Si bien es cierto que la deducción de las ecuaciones de desplazamiento no tiene mayores dificultades, su solución es compleja y aún en nuestros días es tema de debate. Al respecto, existen dos principales métodos de solución. El primero consiste en la aplicación de una técnica numérica, iterativa y por lo tanto aproximada, como lo es el método de Newton-Raphson. El segundo consiste en la formulación de un polinomio, con el cuál es posible obtener varias soluciones reales.

En Merlet (1993) se proponen hasta 12 soluciones del polinomio. En dicha contribución se muestra una comparación del tiempo requerido para obtener una solución por medio del método de Newton-Raphson y el tiempo requerido para generar las 12 soluciones del polinomio. Curiosamente, el tiempo de cálculo requerido resultó considerablemente mayor en el segundo caso. Esto toma sentido si se reconoce que el método de Newton-Raphson converge, si es que

existe la solución, razonablemente en tres o cuatro iteraciones. Por otra parte, si se reconoce que para fines prácticos la plataforma móvil ocupa sólo una ubicación instantánea, entonces la utilización del método de Newton-Raphson en la solución del análisis directo de posición es una opción totalmente válida.

La solución completa del polinomio es bastante reciente, data de hace menos de diez años, y se debe a Husty (1996). En este trabajo la solución numérica de las expresiones del análisis directo de posición del manipulador bajo estudio se resuelve usando el método de Newton-Raphson y se establece de la siguiente manera. Dadas las longitudes de las extremidades del manipulador, determinar la ubicación, es decir la orientación y la posición, de la plataforma móvil con respecto a la plataforma fija por medio del cálculo de las coordenadas de los pares esféricos, los cuales se encuentran en la plataforma móvil, del manipulador. Considere el mecanismo espacial que se muestra en la Figura 1.

El inicio de las extremidades del manipulador se especifica con las coordenadas de las juntas universales  $U_i (i = 1, 2, \dots, 6)$  en la plataforma fija, mientras que las distancias entre los pares esféricos, sobre la plataforma móvil, se especifican por medio de las distancias  $l_{ij} (i = 12, 56, 34; j = 34, 12, 36)$ . Con estos parámetros y dadas las longitudes de las extremidades del manipulador, expresadas en las coordenadas generalizadas  $q_i (i = 1, \dots, 6)$ , se desea determinar la ubicación resultante de la plataforma móvil.

De la geometría del mecanismo surge inmediatamente que

$$b_{ij}^2 = q_i^2 - a'_{ij}{}^2 = q_j^2 - (a_{ij} - a'_{ij})^2 \quad (7)$$

$ij = 12, 34, 56$

de esta manera

$$a'_{ij} = \frac{q_i^2 - q_j^2 + a_{ij}^2}{2a_{ij}} \quad (8)$$

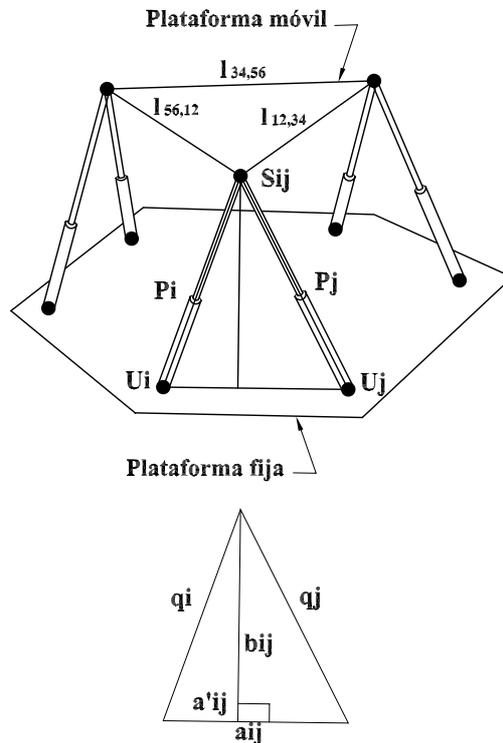


Fig. 1. Plataforma Gough-Stewart tipo 6-3

Considere ahora un sistema global de referencia  $O_{XYZ}$  y tres sistemas de referencia locales,  $o_{xyz}^{ij} (ij = 12, 34, 56)$ , unidos a la plataforma fija tal y como se muestran en la Figura 2.

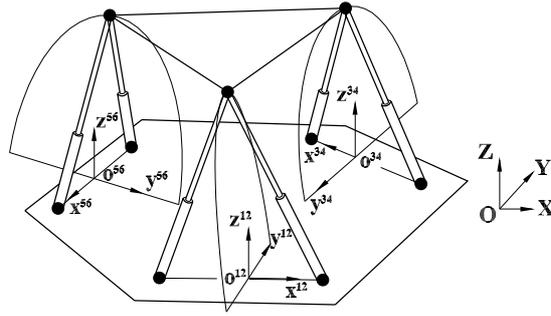


Fig. 2. Los cuatro sistemas de referencia

Entonces, de acuerdo a las circunferencias locales, expresadas en sus correspondientes sistemas de referencia, se obtiene que

$$(y^{ij})^2 + (z^{ij})^2 = b_{ij}^2, ij = 12,34,56 . \quad (9)$$

Más aún, las coordenadas locales pueden expresarse en el sistema global de referencia por medio de matrices homogéneas de transformación como

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} = T^{ij} \begin{bmatrix} x^{ij} \\ y^{ij} \\ z^{ij} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (10)$$

donde, la  $ij$ -ésima matriz homogénea de transformación,  $T^{ij}$ , se determina de acuerdo a un vector de posición  $r_{oij}$ , el cual inicia en el origen del sistema global de referencia, punto  $O$ , y termina en el origen del correspondiente sistema local de referencia, como

$$T^{ij} = \begin{bmatrix} R_{ij} & r_{oij} \\ 0_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix},$$

donde,  $R_{ij}$  es la matriz de rotación la cual se determina por el vector unitario  $u_{ij}$ , cuya dirección se define del punto  $U_i$  al  $U_j$ . Más aún, el análisis directo de posición incluye tres ecuaciones de compatibilidad dadas por las distancias entre los pares esféricos. Esto es

$$|S_i - S_j| = l_{ij}^2 . \quad (11)$$

Las expresiones (9), (10) y (11) conducen a un sistema no lineal de tres ecuaciones con tres incógnitas,  $\{z_{12}, z_{34}, z_{56}\}$ , las cuales corresponden a las componentes sobre el eje  $Z$  de las coordenadas de los pares esféricos. Dicho sistema se resuelve sin mayores dificultades aplicando el método de Newton-Raphson.

$$\left\{ \begin{array}{l} (-\sqrt{b_{34}^2 - (z_{34})^2}uy_{34} + rx_{o34} + \sqrt{b_{12}^2 - (z_{12})^2}uy_{12} - rx_{o12})^2 + (\sqrt{b_{34}^2 - (z_{34})^2}ux_{34} + ry_{o34} - \sqrt{b_{12}^2 - (z_{12})^2}ux_{12} - ry_{o12})^2 + (z_{34} - z_{12})^2 - l_{12,34}^2 = f1 = 0 \\ (-\sqrt{b_{56}^2 - (z_{56})^2}uy_{56} + rx_{o56} + \sqrt{b_{34}^2 - (z_{34})^2}uy_{34} - rx_{o34})^2 + (\sqrt{b_{56}^2 - (z_{56})^2}ux_{56} + ry_{o56} - \sqrt{b_{34}^2 - (z_{34})^2}ux_{34} - ry_{o34})^2 + (z_{56} - z_{34})^2 - l_{34,56}^2 = f2 = 0 \\ (-\sqrt{b_{12}^2 - (z_{12})^2}uy_{12} + rx_{o12} + \sqrt{b_{56}^2 - (z_{56})^2}uy_{56} - rx_{o56})^2 + (\sqrt{b_{12}^2 - (z_{12})^2}ux_{12} + ry_{o12} - \sqrt{b_{56}^2 - (z_{56})^2}ux_{56} - ry_{o56})^2 + (z_{12} - z_{56})^2 - l_{56,12}^2 = f3 = 0 \end{array} \right. \quad (12)$$

Finalmente, el análisis directo de posición se completa determinando las restantes coordenadas de los pares esféricos, por supuesto evaluadas en el sistema global de referencia, a partir de las expresiones (9) y (10).

#### 4 Análisis de Velocidad

Contrario a lo que se indica en Baron y Angeles (2000) en el sentido de que los análisis directos de posición y de velocidad de un manipulador general Gough-Stewart son tareas complejas. En esta sección se muestra cómo la forma de Klein permite resolver de manera simple el análisis directo de velocidad. Por supuesto, como un paso necesario para el análisis de aceleración, también se incluye el análisis inverso de velocidad.

Cada extremidad se modela como un manipulador serie tipo UniversalPrismaticSpherical, por sus siglas en el idioma Inglés, tal y como se muestra en la Figura 3.

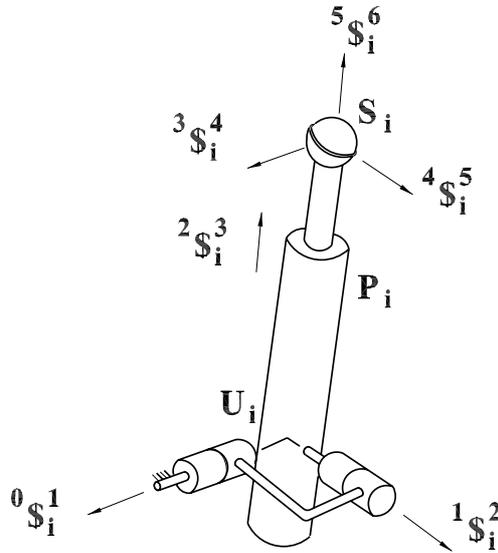


Fig. 3. Modelado de una extremidad

Nótese que la junta universal, también conocida como junta Cardan o de Hooke, se descompone en dos pares de revoluta,  ${}^0\mathcal{S}_i^1$  y  ${}^1\mathcal{S}_i^2$ , cuyos ejes son ortogonales y se intersectan. Por su parte el par prismático se encuentra asociado al tornillo  ${}^2\mathcal{S}_i^3$ , mientras que el par esférico se representa mediante un conjunto de tres tornillos,  $\{{}^3\mathcal{S}_i^4, {}^4\mathcal{S}_i^5, {}^5\mathcal{S}_i^6\}$ , cuyos ejes se intersectan y son mutuamente ortogonales. Sobre la junta universal cabe mencionar que según Tsai (2001), ni Cardan ni Hooke inventaron la junta universal, sin embargo fue Hooke quien popularizó su uso en el siglo XVII y por ello es usual designarla con su nombre. Aplicando la expresión (4), el estado de velocidad de la plataforma móvil, cuerpo 6, con respecto a la plataforma móvil puede obtenerse a través de cualesquiera de las cadenas serie como

$$J_i \Omega_i = {}^0\vec{V}^6 \quad i=1, \dots, 6 \quad (13)$$

donde, la matriz de velocidades pasivas  $\Omega_i$  viene dada por

$$\Omega_i = \begin{bmatrix} \omega_{1i} & {}_1\omega_{2i} & \dot{q}_i & {}_3\omega_{4i} & {}_4\omega_{5i} & {}_5\omega_{6i} \end{bmatrix}^T,$$

mientras que la matriz Jacobiana  $J_i$  es el subespacio generado por

$$J_i = \begin{bmatrix} {}^0\mathcal{S}_i^1 & {}^1\mathcal{S}_i^2 & {}^2\mathcal{S}_i^3 & {}^3\mathcal{S}_i^4 & {}^4\mathcal{S}_i^5 & {}^5\mathcal{S}_i^6 \end{bmatrix}.$$

De esta manera, el análisis inverso de velocidad, es decir el cálculo de las velocidades pasivas de la  $i$ -ésima extremidad, vendrá dado por

$$\Omega_i = J_i^{-1} {}^0\vec{V}^6. \quad (14)$$

Es importante mencionar que una condición elemental para que exista una solución del análisis inverso de velocidad, es el que la matriz  $J_i$  sea invertible, es decir que su determinante sea diferente de cero. En caso contrario la  $i$ -ésima extremidad se encuentra en una singularidad. En dicha configuración el manipulador pierde grados de libertad y la plataforma móvil se encuentra en un punto muerto, es decir, en reposo a pesar de que las velocidades generalizadas, sean, al menos una, diferentes de cero. Suponga que se introduce la línea  $\$i$  en coordenadas de Plucker a lo largo del eje de la  $i$ -ésima extremidad

$$\$i = \begin{bmatrix} \hat{s}_i \\ \bar{s}_{oi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (s_{iX}, s_{iY}, s_{iZ}) \\ (s_{oiX}, s_{oiY}, s_{oiZ}) \end{bmatrix}.$$

Entonces, es obvio que dicha línea es recíproca a todos los tornillos que representan los pares de revoluta de la cadena serie. Por lo tanto, aplicando la forma de Klein entre  $\$i$  y ambos lados de la ecuación (13), los términos del lado izquierdo, a excepción del asociado al par prismático, de la ecuación (13) se anulan, de donde

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= KL(\$i, {}^0\vec{V}^6) \\ &= s_i \times v_{OX} + s_{iY} v_{OY} + s_{iZ} v_{OZ} + \\ &\quad \omega_X s_{oiX} + \omega_Y s_{oiY} + \omega_Z s_{oiZ} \\ &\quad i = 1, \dots, 6 \end{aligned} \quad (15)$$

Por lo tanto, arreglando en forma matricial la expresión (15) el estado de velocidad de la plataforma móvil, con respecto a la plataforma fija, se determina de manera directa en términos de las velocidades generalizadas como

$${}^0\vec{V}^6 = S^{-1} \dot{Q} \quad (16)$$

donde, la matriz de velocidades generalizadas  $Q$  viene dada por

$$\dot{Q} = [\dot{q}_1 \quad \dot{q}_2 \quad \dot{q}_3 \quad \dot{q}_4 \quad \dot{q}_5 \quad \dot{q}_6]^T$$

mientras que la matriz  $S$  se determina como

$$S = \begin{bmatrix} \bar{s}_{o1} & \bar{s}_{o2} & \bar{s}_{o3} & \bar{s}_{o4} & \bar{s}_{o5} & \bar{s}_{o6} \\ \hat{s}_1 & \hat{s}_2 & \hat{s}_3 & \hat{s}_4 & \hat{s}_5 & \hat{s}_6 \end{bmatrix}^T.$$

Una vez que se determina el estado de velocidad  ${}^0\vec{V}^6$ , la velocidad angular de la plataforma móvil se obtiene directamente como la componente primaria de dicho estado de velocidad. Es decir

$$\vec{\omega} = P({}^0\vec{V}^6) \quad (17)$$

Nótese que una condición elemental para que exista la solución del análisis inverso de velocidad, vía la expresión (16), es el que la matriz  $S$  sea invertible, es decir, que su determinante sea diferente de cero. En caso contrario el manipulador se encuentra en una configuración singular provocada por el análisis directo de velocidad. Usualmente la condición de no singularidad se establece calculando el determinante de la matriz  $S$ . Sin embargo esta opción dificulta la interpretación geométrica. Por lo tanto, es recomendable recurrir al concepto de dependencia lineal a fin de elucidar la presencia de esta clase de singularidades. Una breve inspección de la matriz  $S$  revela que el manipulador se encuentra fuera de una postura singular, asociada al análisis directo de velocidad, siempre y cuando se satisfaga la siguiente condición

$$\sum_{i=1}^6 \lambda_i \$i = 0, \quad \lambda_i = 0. \quad (18)$$

Es decir, que las líneas  $\$i$  generen con unicidad al vector cero de seis dimensiones. Por supuesto, es totalmente posible el que el manipulador pueda generar posturas en las que no se satisfagan las condiciones de la expresión (18) y por lo tanto éste se encuentre en una configuración singular.

Por ejemplo, si los vectores unitarios  $s_i$  son coplanares, vea la Figura 4, entonces las componentes duales o momentos,  $s_{oi}$ , serán colineales y los escalares  $\lambda_i$  podrán tener valores arbitrarios diferentes de cero, y con ello se tendrá un

infinito de soluciones para el análisis directo de velocidad. Más aún, en dicha posición la plataforma móvil es incapaz de resistir la acción de fuerzas externas verticales.

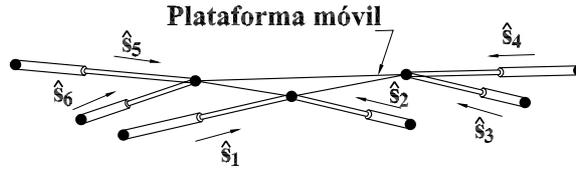


Fig. 4. Los vectores unitarios  $S_i$  son coplanares

Otra configuración singular evidente se presenta cuando la longitud de al menos una de las extremidades del manipulador se anula, en tal caso la línea de dicha extremidad no estará definida de manera única y con ello el análisis directo de velocidad conduce a un infinito de soluciones. Para mayor información sobre análisis de singularidades en plataformas Gough-Stewart, se sugiere consulte Gosselin y Angeles (1990), St-Onge y Gosselin (2000), y Di Gregorio (2002).

## 5 Análisis de Aceleración

Aplicando la expresión (5), el estado de aceleración reducida de la plataforma móvil con respecto al eslabón base, en forma de tornillos infinitesimales, puede determinarse a través de cualesquiera de las cadenas serie conectoras como

$$J_i \dot{\Omega}_i + \$_{L_i} = {}^0 \bar{A}_R^6 \quad i = 1, \dots, 6 \quad (19)$$

donde, la matriz de aceleraciones pasivas viene dada por

$$\dot{\Omega}_i = \left[ {}_0 \dot{\omega}_{1i} \quad {}_1 \dot{\omega}_{2i} \quad \ddot{q}_i \quad {}_3 \dot{\omega}_{4i} \quad {}_4 \dot{\omega}_{5i} \quad {}_5 \dot{\omega}_{6i} \right]^T,$$

mientras que el  $i$ -ésimo tornillo de Lie  $L_i$  se determina como

$$\begin{aligned} \$_{L_i} = & \left[ {}_0 \omega_{1i} \quad {}^0 \$_i^1 \quad {}_1 \omega_{2i} \quad {}^1 \$_i^2 + \dot{q}_i \quad {}^2 \$_i^3 + \dots + {}_5 \omega_{6i} \quad {}^5 \$_i^6 \right] + \\ & \left[ {}_1 \omega_{2i} \quad {}^1 \$_i^2 \quad \dot{q}_i \quad {}^2 \$_i^3 + \dots + {}_4 \omega_{5i} \quad {}^4 \$_i^5 + {}_5 \omega_{6i} \quad {}^5 \$_i^6 \right] + \\ & \left[ {}_2 \omega_{3i} \quad {}^2 \$_i^3 \quad {}_3 \omega_{4i} \quad {}^3 \$_i^4 + {}_4 \omega_{5i} \quad {}^4 \$_i^5 + {}_5 \omega_{6i} \quad {}^5 \$_i^6 \right] + \\ & \left[ {}_3 \omega_{4i} \quad {}^3 \$_i^4 \quad {}_4 \omega_{5i} \quad {}^4 \$_i^5 + {}_5 \omega_{6i} \quad {}^5 \$_i^6 \right] + \left[ {}_4 \omega_{5i} \quad {}^4 \$_i^5 \quad {}_5 \omega_{6i} \quad {}^5 \$_i^6 \right] \\ & i = 1, 2, \dots, 6 \end{aligned}$$

Por lo tanto el análisis inverso de aceleración, es decir el cálculos de las aceleraciones pasivas de la  $i$ -ésima extremidad del manipulador a partir del estado de aceleración reducida de la plataforma móvil, vendrá dado a partir de la expresión (19) por

$$\dot{\Omega}_i = J_i^{-1} ({}^0 \bar{A}_R^6 - \$_{L_i}), \quad i = 1, 2, \dots, 6 \quad (20)$$

A continuación, y siguiendo el procedimiento indicado en el análisis directo de velocidad, se muestra cómo el análisis directo de aceleración, es decir el cálculo de las aceleraciones angulares de la plataforma móvil, puede obtenerse de manera sistemática y con la gran ventaja de prescindir del cálculo de las aceleraciones pasivas del manipulador. Aplicando la forma de Klein entre la línea  $\$_i$  y ambos lados de la expresión (19), con la correspondiente cancelación de términos se obtiene que

$$\ddot{q}_i + KL(\$_i, \$_{L_i}) = KL(\$_i, {}^0 \bar{A}_R^6) \quad i = 1, \dots, 6 \quad (21)$$

Por lo tanto, arreglando en forma matricial la expresión (21), el estado de aceleración reducida de la plataforma móvil, con respecto a la plataforma fija, se determina como

$${}^0 \bar{A}_R^6 = S^{-1} \ddot{Q}, \quad (22)$$

donde, la matriz de aceleraciones generalizadas viene dada por

$$\ddot{Q} = \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 + KL(\$_1, \$_{L1}) \\ \ddot{q}_2 + KL(\$_2, \$_{L2}) \\ \ddot{q}_3 + KL(\$_3, \$_{L3}) \\ \ddot{q}_4 + KL(\$_4, \$_{L4}) \\ \ddot{q}_5 + KL(\$_5, \$_{L5}) \\ \ddot{q}_6 + KL(\$_6, \$_{L6}) \end{bmatrix}.$$

Finalmente, la aceleración angular de la plataforma móvil, con respecto a la plataforma fija, se obtiene como la componente primaria del estado de aceleración reducida de la expresión (22). Es decir

$$\dot{\omega} = P(^0\bar{A}_R^6). \quad (23)$$

Nótese como el cálculo de la aceleración angular de la plataforma móvil, vía la expresión (23), no requiere del cálculo de las aceleraciones pasivas del manipulador. Sin duda, esto representa un considerable ahorro de tiempo de cómputo en el análisis de aceleración.

### 6 El Algoritmo de Análisis Cinemático

La formulación de las secciones 4 y 5 se implementó en un programa de computadora en Maple©, y en la Figura 5 se muestra su estructura general.

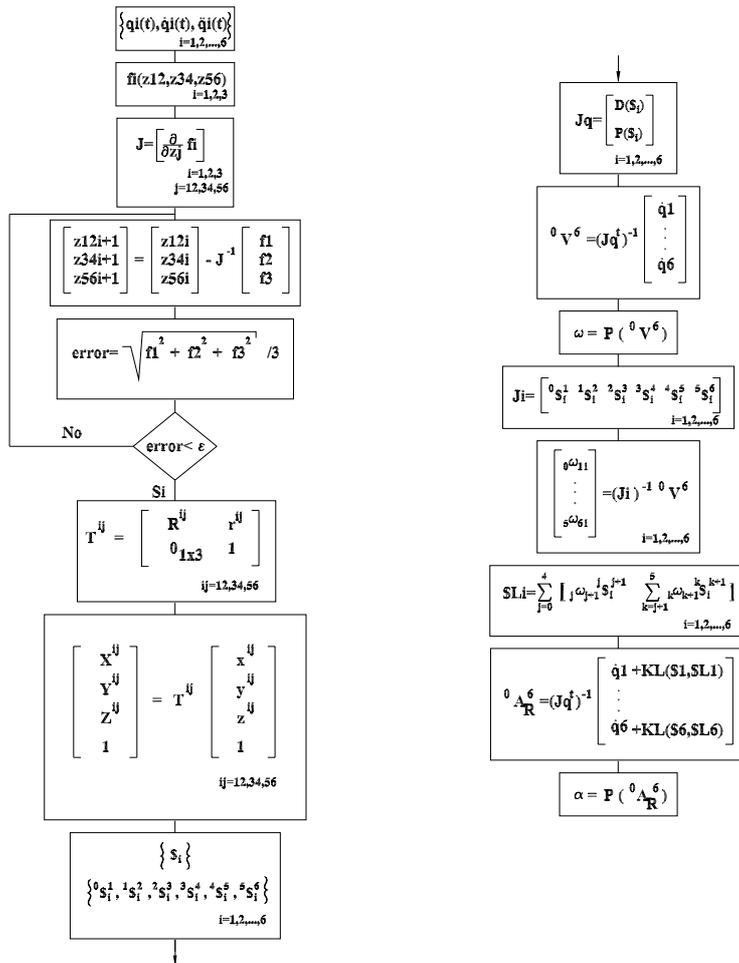


Fig. 5. Secuencia del Algoritmo de Análisis

Como muestra del estilo de programación seleccionado, a continuación se proporcionan algunos de los listados de los procedimientos utilizados. Si el lector desea un listado completo del programa, favor de solicitarlo al primer autor.

Dados dos vectores de seis dimensiones  $S_1$  y  $S_2$ , el procedimiento *Lie* calcula el producto de Lie resultante entre dichos vectores.

```

Lie := proc(S1, S2)
  local
    PS1, PS2, DS1, DS2, primal, dual;
    PS1 :=
      vector(3, [S11, S12, S13]);
    DS1 :=
      vector(3, [S14, S15, S16]);
    PS2 :=
      vector(3, [S21, S22, S23]);
    DS2 :=
      vector(3, [S24, S25, S26]);
    primal := crossprod(PS1, PS2);
    dual := evalm(crossprod(PS1, DS2)
      - crossprod(PS2, DS1));
    vector(6, [primal1, primal2,
      primal3, dual1, dual2, dual3])
  end

```

Sean  $S_1$  y  $S_2$  dos vectores de seis dimensiones, con el procedimiento *Klein* se calcula la forma de Klein resultante entre dichos vectores

```

Klein := proc(S1, S2)
  S11 × S24 + S12 × S25
  + S13 × S26 + S21 × S14
  + S22 × S15 + S23 × S16
end

```

Por su parte las coordenadas de Plucker de las líneas unitarias se calculan con el procedimiento *Lineaunitaria*.

```

Lineaunitaria := proc(Pa, Pb, qa)
  local primal, dual;
  primal :=
    convert(evalm((Pa - Pb)/qa), vector)
  ;
  dual := crossprod(Pb, Primal);
  vector(6, [dual1, dual2, dual3,
    primal1, primal2, primal3])
end

```

Finalmente, los tornillos infinitesimales asociados a los pares prismáticos se calculan con el procedimiento *Prismatico*.

```

Prismatico := proc(Pa, Pb, qa)
  local dual;
  dual :=
    convert(evalm((Pa - Pb)/qa), vector)
  ;
  vector(6,
    [0, 0, 0, dual1, dual2, dual3])
end
    
```

## 7 Ejemplo Numérico

En esta sección el algoritmo de cálculo propuesto se aplica a un ejemplo numérico. Suponga que las coordenadas generalizadas se rigen por las funciones periódicas

$$\begin{aligned}
 q_1 &= 1.08028 + 0.05\text{sen}(t) \\
 q_2 &= 1.8028 - 0.05\text{sen}(t) \\
 q_3 &= 1.75 + 0.05\text{sen}(t) \\
 q_4 &= 1.5207 - 0.05\text{sen}(t) \\
 q_5 &= 1.5207 + 0.05\text{sen}(t) \\
 q_6 &= 1.75 - 0.05\text{sen}(t)
 \end{aligned} \tag{24}$$

de donde, las velocidades y aceleraciones generalizadas vendrán dadas por

$$\begin{aligned}
 \dot{q}_1 &= \dot{q}_3 = \dot{q}_5 = 0.05 \cos(t) \\
 \ddot{q}_1 &= \ddot{q}_3 = \ddot{q}_5 = -0.05 \text{sen}(t) \\
 \dot{q}_2 &= \dot{q}_4 = \dot{q}_6 = -0.05 \cos(t) \\
 \ddot{q}_2 &= \ddot{q}_4 = \ddot{q}_6 = 0.05 \text{sen}(t)
 \end{aligned}$$

Más aún, las coordenadas de las juntas universales, expresadas en el sistema global de referencia, vienen dadas por

$$\begin{aligned}
 P_1 &= (-1,0,0) & P_4 &= (-0.5,-0.866,0) \\
 P_2 &= (0.5,-0.866,0) & P_5 &= (1,0,0) \\
 P_3 &= (0.5,0.866,0) & P_6 &= (-0.5,0.866,0)
 \end{aligned}$$

Mientras que las distancias entre los pares esféricos sobre la plataforma móvil se seleccionan de tal forma que

$$l_{ij} = 0.75$$

Con dicha información, se desea determinar la velocidad angular instantánea y la aceleración angular instantánea de la plataforma móvil, con respecto a la plataforma fija, si se considera que el tiempo  $t$  varía en el intervalo  $0 \leq t \leq 2\pi$  segundos con un incremento  $\Delta t$  de  $\pi/36$  segundos.

La Figura 6 muestra la gráfica del error, *versus* el tiempo que dura el movimiento del manipulador, que se obtuvo en el análisis directo de posición, esto es la solución numérica *vía* el método de Newton-Raphson del sistema no lineal de ecuaciones dado en la expresión (12). Al respecto cabe mencionar que el criterio de error seleccionado se rige de la siguiente manera

$$\varepsilon = \frac{1}{3} \sqrt{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2}$$

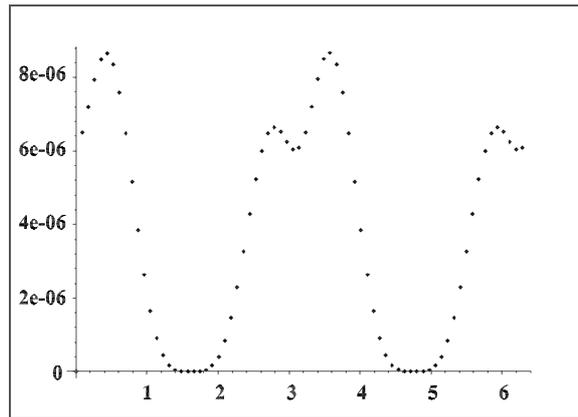


Fig. 6. Error generado en el análisis directo de posición

Por otra parte, es interesante mencionar que sólo se requirieron de tres iteraciones para cada ubicación instantánea de la plataforma móvil. Sin embargo, es importante mencionar que el método de Newton- Raphson, al ser una técnica numérica iterativa, requiere de aproximaciones iniciales razonables para su convergencia. Es evidente que en el tiempo inicial no se tiene ninguna referencia sobre la posible ubicación de la plataforma móvil y por lo tanto es necesario suponer un conjunto de aproximaciones iniciales a criterio del usuario, esta situación se complica si se toma en cuenta que para un conjunto dado de coordenadas generalizadas existe un total de 16 posibles ubicaciones de la plataforma.

A fin de garantizar un funcionamiento apropiado del algoritmo en su etapa inicial, se recomienda realizar un esquema del manipulador en su posición inicial en un programa de dibujo por computadora como lo puede ser Autocad© y con ello seleccionar el conjunto de aproximaciones iniciales.

Una vez que con el algoritmo se calcula la ubicación de la plataforma en su fase inicial, las posiciones subsecuentes se determinan sin mayor problema tomando como aproximación inicial la posición precedente correspondiente.

Es interesante notar en la Figura 6 que el comportamiento del error, para tres iteraciones con el método de Newton- Raphson, sigue un patrón perfectamente definido y de tipo periódico.

Por su parte la Figura 7 muestra los resultados numéricos obtenidos con el programa para el cálculo de la velocidad angular de la plataforma móvil. Puesto que el movimiento de la plataforma se realiza en tres dimensiones, convenientemente se optó por graficar la magnitud de la velocidad angular *versus* el tiempo que dura el movimiento.

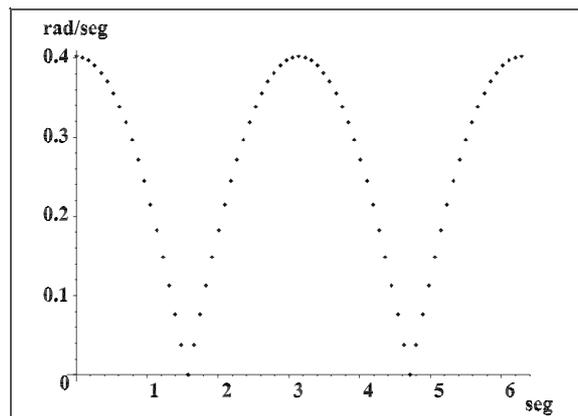


Fig. 7. Historial de la velocidad angular de la plataforma móvil

Nótese que, como era de esperarse, de acuerdo al tipo de funciones asignadas a los pares prismáticos, el comportamiento de la velocidad angular de la plataforma móvil, con respecto a la plataforma fija, es de tipo periódico.

Finalmente, los resultados numéricos obtenidos con el programa para el cálculo de la aceleración angular de la plataforma móvil, con respecto a la plataforma fija, se resumen en la Figura 8.

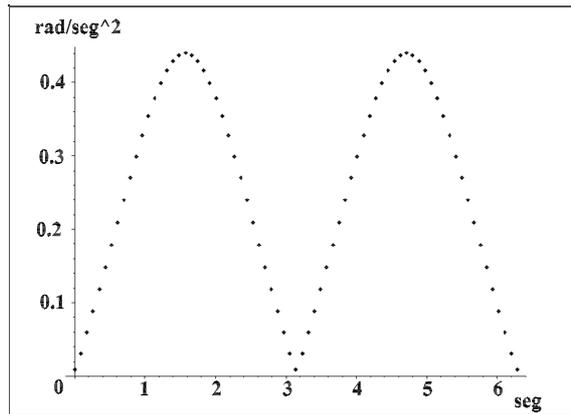


Fig. 8. Historial de la aceleración angular de la plataforma móvil

En la Figura 8 se aprecia que el comportamiento de la aceleración angular de la plataforma también es de tipo periódico. Más aún, la aceleración angular alcanza su valor máximo cuando su velocidad angular es mínima, un resultado totalmente predecible pero que vale la pena mencionar.

Comprobar los resultados numéricos de esta sección, por supuesto con un método diferente al que aquí se propone, sin duda debe de ser una tarea ardua. Por lo tanto, para corroborar los resultados numéricos, se optó por recurrir al programa de análisis dinámico ADAMS© y en la siguiente sección se resume el procedimiento de análisis.

## 8 Validación de Resultados Numéricos con ADAMS©

Con el objeto de verificar los resultados del ejemplo numérico, se generó un modelo, extremadamente simple, con el programa de análisis dinámico ADAMS© y en esta sección se proporcionan, en forma de gráficas, los resultados obtenidos. La plataforma móvil se modeló como un elemento placa mientras que el resto de los eslabones se modelaron como elementos cilindro, todos ellos elementos sólidos, y a fin de darle suficiente realismo al modelo, los eslabones inferiores poseen huecos los cuales corresponden al diámetro exterior de los eslabones superiores, estos huecos se generaron por medio de simples operaciones booleanas.

En la Figura 9 se muestra el modelo, con la opción alambre, simplificado Para la posición inicial del mecanismo se utilizaron los resultados obtenidos con el algoritmo en el análisis directo de posición.

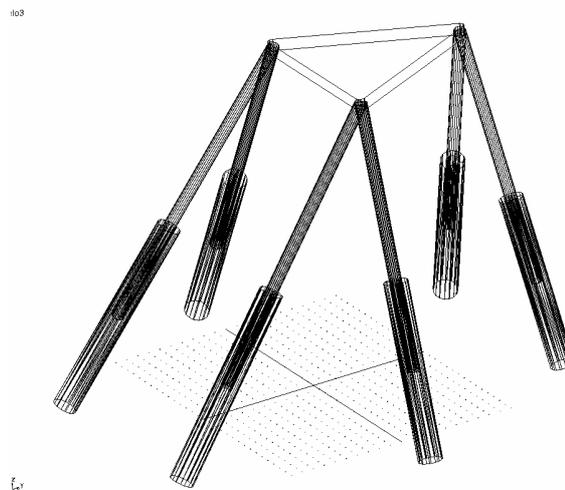


Fig. 9. El modelo en ADAMS©

Por supuesto el programa ADAMS© posee la suficiente capacidad como para generar modelos mucho más completos y realistas. Sin embargo, puesto que el objetivo de la presente sección es el de validar los resultados numéricos obtenidos en la sección previa, como lo son el cálculo de la velocidad angular y de la aceleración angular de la plataforma móvil, se optó por modelar el mecanismo bajo estudio de la manera más simple, tal y como se muestra en la Figura 9.

Por su parte, la Figura 10 muestra los pares cinemáticos asignados a cada una de las extremidades o cadenas serie del manipulador. La cadena serie se une a la plataforma fija por medio de una junta universal o de Hooke. El par prismático actúa a lo largo de la extremidad y con la flecha se denota su desplazamiento translacional independiente. Finalmente la *i-ésima* cadena serie se une a la plataforma móvil por medio de un par esférico.

El programa ADAMS© admite que se asignen funciones de desplazamiento, de velocidad o de aceleración a los pares cinemáticos que requiera el modelo. Para este ejemplo en particular, se asignaron las funciones de desplazamiento indicadas en la expresión (24), las cuales dependen del tiempo.

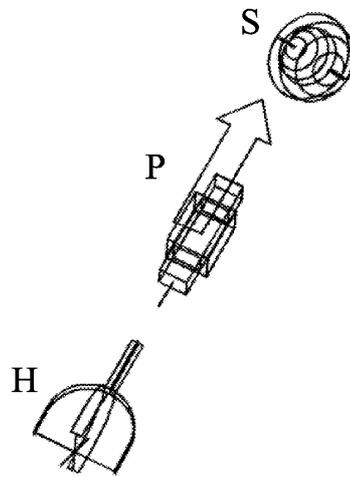


Fig. 10. Pares Cinemáticos de una Extremidad

En la Figura 11 se resume el historial de los resultados numéricos del cálculo de la velocidad angular.

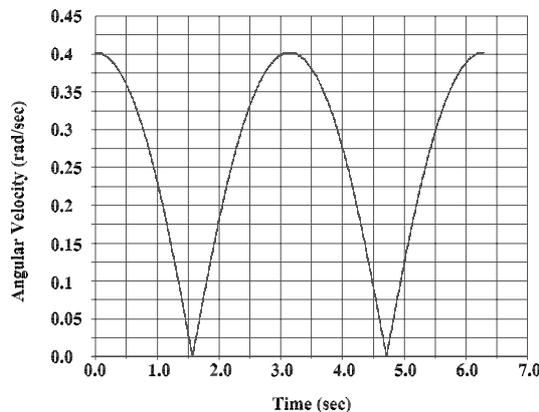


Fig. 11. Historial de la velocidad angular de la plataforma móvil, por medio de ADAMS©.

Mientras que en la Figura 12 se resume el historial de los resultados numéricos del cálculo de la aceleración angular.

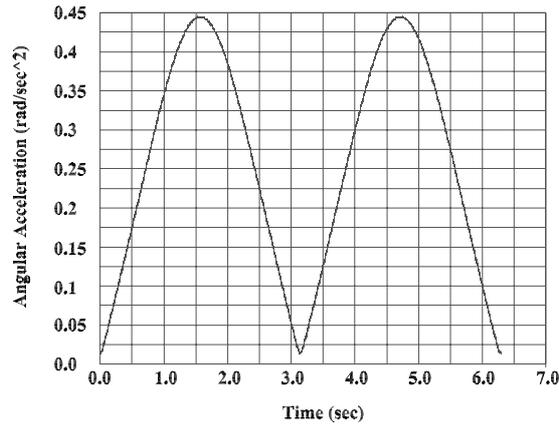


Fig. 12. Historial de la aceleración angular de la plataforma móvil, por medio de ADAMS©.

Finalmente, por favor nótese que los resultados obtenidos con el programa ADAMS© concuerdan razonablemente con los obtenidos con el algoritmo propuesto y con ello se comprueba su confiabilidad.

## 9 Conclusiones

En este trabajo se proporciona un algoritmo que permite calcular el análisis cinemático directo de una plataforma espacial Gough-Stewart tipo 6-3. Puesto que sólo se requiere de una solución para el análisis directo de posición del mecanismo, éste se resuelve aplicando el método de Newton-Raphson. Los análisis de velocidad y de aceleración se resuelven aplicando exclusivamente la teoría de tornillos infinitesimales. La forma de Klein, una forma simétrica bilineal del álgebra de Lie  $e(3)$ , permitió simplificar considerablemente la deducción de las expresiones para el cálculo de la velocidad angular y de la aceleración angular de la plataforma móvil con respecto a la plataforma fija. El algoritmo se probó en un ejemplo numérico y los resultados numéricos obtenidos se comprobaron con el programa de análisis de mecanismos ADAMS©.

Finalmente, si bien es cierto que el análisis directo de posición que aquí se propone es válido sólo para plataformas tipo 6-3, al contrario los análisis de velocidad y de aceleración, tanto inversos como directos, son aplicables para una plataforma general Gough-Stewart.

## Reconocimientos

Los autores agradecen al Consejo de Ciencia y Tecnología del Estado de Guanajuato, Concyteg, y al Consejo del Sistema Nacional de Educación Tecnológica, Cosnet, el apoyo económico otorgado para la realización de la presente investigación.

De igual forma se agradece al grupo SSC, campus San Miguel de Allende Guanajuato, las facilidades otorgadas para la utilización del programa de análisis de mecanismos por computadora ADAMS©.

## Referencias

1. **Ball, R.S.**, *A Treatise on the Theory of Screws*, Cambridge University Press: Cambridge U. K., 1900 (Reedición 1998).
2. **Baron, L.** y **Angeles, J.**, "The direct kinematics of parallel manipulators under joint-sensor redundancy", *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 16, No. 1, 2000, pp. 12-19.
3. **Brand, L.**, *Vector and Tensor Analysis*, John Wiley & Sons, New York, 1947.
4. **Di Gregorio, R.**, "Singularity-locus expression of a class of parallel mechanisms", *Robotica*, Vol. 20, 2002, pp. 323-328.
5. **Gallardo, J.** y **Rico, J.M.**, "Screw theory and helicoidal fields", *Proc. 1998 ASME Design Engineering Technical Conferences*, CD-ROM, Paper DETC98/MECH-5893.
6. **Gosselin, C.**, y **Angeles, J.**, "Singularity analysis of closed-loop kinematic chains", *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 6, No. 32, 1990, pp. 281-290.
7. **Husty, M.L.**, "An algorithm for solving the direct kinematics of general Stewart-Gough platforms", *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 31, No. 4, 1996, pp. 365-380.

8. **Innocenti, C.**, "Forward kinematics in polynomial form of the general Stewart platform", *Proc. 1998 ASME Design Engineering Technical Conference*, CD-ROM, Paper DETC98/MECH-5894.
9. **Ku, D.-M.**, "Forward kinematic analysis of a 6-3 type Stewart platform mechanism", *IMechE Part K Journal of Multibody Dynamics*, Vol. 214, No. K4, pp. 233-241.
10. **Merlet, J.-P.**, *Parallel Robots*, Kluwer Academic Publishers, 1999.
11. **Merlet, J.-P.**, "Direct kinematics of parallel manipulators", *IEEE transactions on Robotics and Automation*, Vol. 9, No. 6, 1993, pp. 842-846.
12. **Raghavan, M.**, "The Stewart platform of general geometry has 40 configurations", *ASME Journal of Mechanical Design*, Vol. 115, No. 2, 1993, pp. 277-282.
13. **Rico, J.M. y Duffy, J.**, "An application of screw algebra to the acceleration analysis of aerial chains", *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 31, No. 4, 1996, pp. 445-457.
14. **Rico, J.M. y Duffy, J.**, "Forward and inverse acceleration analyses of in-parallel manipulators", *ASME Journal of Mechanical Design*, Vol. 122, 2000, pp. 299-303.
15. **St-Onge, B.M. y Gosselin, C.**, "Singularity analysis and representation of the general Gough-Stewart platform", *Int. J. Robotics Research*, Vol. 19, No. 3, 2000, pp. 271-288.
16. **Tsai, L.W.**, *Enumeration of Kinematic Structures According to Function*, CRC Press, 2001.



**Jaime Gallardo-Alvarado.** *Obtuvo el Título de Ing. Ind. Mecánico y el grado de Maestro en Ciencias en Ing. Mecánica ambos en el Instituto Tecnológico de Celaya en los años 1985 y 1989 respectivamente, y el grado de Doctor en Ciencias en Ing. Eléctrica en el Instituto Tecnológico de la Laguna en el año 1999. Durante varios años trabajó en centros de investigación fundados por el CONACYT, como lo son el Centro de Investigación y Asistencia Técnica del Estado de Querétaro y el Instituto Mexicano de Investigaciones en Manufacturas Metal-Mecánicas. A partir del año 1993 se incorporó como Profesor-Investigador de tiempo completo al Depto. de Ing. Mecánica del Instituto Tecnológico de Celaya. Es miembro del Sistema Nacional de Investigadores, de la Asociación Mexicana de Robótica y de la International Federation for the Theory of Machines and Mechanisms. Su principal área de interés es el modelado cinemático y dinámico de manipuladores serie y paralelo por medio de la teoría de tornillos.*



**José María Rico-Martínez.** *Obtuvo el Título de Ing. Ind. Mecánico en el Inst. Tecnológico de Celaya en el año 1974, el grado de Maestro en Ciencias en Ing. Mecánica en el Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey en el año 1977 y el grado de Doctor en Ingeniería Mecánica en la Universidad de Florida en el año 1988. A partir de 1975 se incorporó como Profesor-Investigador de tiempo completo al Depto. de Ing. Mecánica del Instituto Tecnológico de Celaya. Ha realizado estancias postdoctorales en la Universidad de Florida, la Universidad Estatal de Arizona y la Universidad de California en Davis. Es miembro del Sistema Nacional de Investigadores, de la American Society of Mechanical Engineers y de la International Federation for the Theory of Machines and Mechanisms. Sus principales áreas de interés comprenden la cinemática y dinámica, teórica y aplicada, así como vibraciones mecánicas.*



**Horacio Orozco-Mendoza.** *Obtuvo el Título de Ing. Ind. Mecánico en el Inst. Tecnológico de Celaya en el año 1981, el grado de Maestro en Ciencias en Ing. Mecánica en el Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey en el año 1983 y el grado de Doctor en Ingeniería Mecánica en la Universidad de Texas en el año 2000. A partir de 1983 se incorporó como Profesor-Investigador de tiempo completo al Depto. de Ing. Mecánica del Instituto Tecnológico de Celaya. Es miembro de la American Society of Mechanical Engineers. Su principal área de interés es sistemas dinámicos y control.*