

Modelado para traves de sección transversal rectangular con cartelas parabólicas: Parte 2

Ricardo Sandoval Rivas, Arnulfo Luévanos Rojas, Sandra López Chavarría,
Manuel Medina Elizondo

Universidad Autónoma de Coahuila,
Instituto de Investigaciones Multidisciplinarias, Torreón, Coahuila,
México

{ricardo_sandoval_rivas, arnulfol_2007, sandylopez5}@hotmail.com,
drmanuelmediana@yahoo.com.mx

Resumen. La parte 1 de este documento se presentó un modelo matemático para traves de sección transversal rectangular con cartelas parabólicas (simétricas o no simétricas) sujetas a una carga uniformemente distribuida tomando en cuenta las deformaciones por flexión y cortante para obtener los momentos de empotramiento, factores de transporte y factores de rigidez. En este trabajo se presenta un modelo matemático para el mismo tipo de traves de sección transversal con cartelas parabólicas bajo una carga concentrada localizada en cualquier parte de la viga tomando en cuenta las deformaciones por flexión y cortante para obtener los momentos de empotramiento usando el mismo procedimiento. El modelo tradicional considera las deformaciones por flexión solamente. También, una comparación se realiza entre el modelo tradicional y el modelo propuesto. Además de la eficacia y la precisión del modelo desarrollado, una ventaja significativa es que los momentos de empotramiento se calculan para cualquier sección transversal rectangular de la viga usando la ecuación matemática presentada en este documento, que es la parte principal de esta investigación.

Palabras clave. Miembros rectangulares, carga concentrada, cartelas parabólicas, deformaciones por flexión y cortante, momentos de empotramiento.

Modeling for Beams of Rectangular Cross Section with Parabolic Haunches: Part 2

Abstract. The part 1 of this paper is presented a mathematical model for beams of rectangular cross section with parabolic haunches (symmetric or non-symmetric) subjected to a uniformly distributed load

taking into account the bending and shear deformations to obtain the fixed-end moments, carry-over factors and stiffness factors. In this paper is presented a mathematical model for the same type of beams of cross section with parabolic haunches under a concentrated load located anywhere on the beam taking into account the bending and shear deformations to obtain the fixed-end moments using the same procedure. The traditional model considers only bending deformations, and others authors present tables considering the bending and shear deformations, but are restricted to certain relationships. Also, a comparison is made between the traditional model and the proposed model. Besides the effectiveness and accuracy of the developed models, a significant advantage is that fixed-end moments are calculated for any rectangular cross section of the beam using the mathematical equation presented in this paper, which is the main part of this research.

Keywords. Rectangular members, concentrated load, parabolic haunches, bending and shear deformations, fixed-end moments.

1. Introducción

Una de las principales preocupaciones de la ingeniería estructural es proponer métodos elásticos fiables para modelar satisfactoriamente a los miembros de sección transversal variable, de tal manera que se tenga la certeza en la determinación de los elementos mecánicos, tales como: deformaciones y desplazamientos que permitan diseñar adecuadamente este tipo de miembros.

Las traves acarteladas de concreto reforzado ofrecen las siguientes ventajas con respecto a las

vigas prismáticas: a) Aumentan sustancialmente la rigidez lateral, b) Promover un uso más eficiente del concreto y del acero de refuerzo longitudinal, c) Reducir el peso del edificio, optimizar la resistencia y la estabilidad o para cumplir los requisitos arquitectónicos y funcionales específicos, d) Facilitar la colocación de instalaciones eléctricas, de aire acondicionado y sanitarias en el edificio (lo cual reduce la altura del entrepiso).

Los miembros de sección transversal rectangular sometida a una carga concentrada su principal aplicación se encuentra en las cargas vivas (cargas móviles) de los puentes correspondientes a las cargas concentradas transmitidos por los vehículos a través de sus ruedas hacia la superficie de la carretera en el tablero.

Durante el siglo pasado, entre 1950 y 1960 se desarrollaron varias ayudas de diseño, como las presentadas por Guldán [1], y las tablas más populares publicados por Portland Cement Association (PCA) en 1958 "Handbook" [2].

Los documentos más relevantes que tratan el tema de los elementos estructurales con sección transversal variable se muestran en la parte 1 [3-18].

Los métodos tradicionales toman en cuenta las deformaciones por flexión y las deformaciones por cortante se desprecian [19-21].

Este trabajo presenta un modelo matemático para traves de sección transversal rectangular con cartelas parabólicas (simétricas o no simétricas) bajo una carga concentrada localizada en cualquier parte de la viga tomando en cuenta las deformaciones por flexión y cortante para obtener los momentos de empotramiento, que es la novedad de esta investigación. Las propiedades de la sección transversal rectangular de la viga varían a lo largo de su eje "x", es decir, el ancho "b" es constante y la altura "h" varía a lo largo de la viga en tres partes diferentes, las partes extremas tienen una variación parabólica, y la parte central es constante. Las ecuaciones de compatibilidad y equilibrio se utilizan para resolver este tipo de problemas, y las deformaciones en cualquier parte de la viga se encuentran por medio del principio del trabajo virtual mediante la integración exacta para obtener los momentos de empotramiento.

Algunos resultados se obtienen usando el software "Derive". El modelo tradicional considera las deformaciones por flexión solamente. También, una comparación se realiza entre el modelo tradicional y el modelo propuesto para observar las diferencias. Además de la eficacia y la precisión del modelo desarrollado, una ventaja significativa es que los momentos de empotramiento se calculan para cualquier sección transversal rectangular de la viga usando la ecuación matemática presentada en este documento, que es la parte principal de esta investigación.

2. Modelo propuesto

2.1. Momentos de empotramiento para una carga concentrada

La Figura 1 de la parte 1 muestra una viga en elevación y también presenta su sección transversal rectangular tomando en cuenta el ancho "b" es constante y la altura "h_x" varía a lo largo de su eje "x" de forma parabólica en tres partes diferentes.

En la Figura 1(a) para los casos 1, 2 y 3 (Caso 1: cuando la carga P se localiza de $0 \leq x \leq a$, Caso 2: cuando la carga P se encuentra de $a \leq x \leq L - c$, Caso 3: cuando la carga P se ubica de $L - c \leq x \leq L$) se muestra la viga "AB" sometida a una carga concentrada localizada en cualquier parte de la viga y empotrada en sus extremos. Los momentos de empotramiento en sus extremos se encuentran mediante la suma de los efectos.

Los momentos se consideran positivos, cuando giran en sentido inverso y negativo cuando giran en sentido horario. En la Figura 1(b) para los tres casos se presenta la misma viga simplemente apoyada en sus extremos bajo la carga aplicada para obtener las rotaciones " θ_{A1} " y " θ_{B1} " para el caso 1, " θ_{A2} " y " θ_{B2} " para el caso 2, " θ_{A3} " y " θ_{B3} " para el caso 3.

Ahora, las rotaciones " f_{11} " y " f_{21} " son causados por un momento unitario aplicado en el soporte "A", según las Figura 1(c), y en cuanto a " f_{12} " y " f_{22} " son causados por el momento unitario aplicado en el soporte "B", esto se observa en las Figura 1(d) [10-18].

Las ecuaciones de compatibilidad y equilibrio para la viga son [22-24]:

para $0 \leq x \leq a$:

$$-f_{11}M_{AB} + f_{12}M_{BA} = \theta_{A1}, \quad (1)$$

$$-f_{21}M_{AB} + f_{22}M_{BA} = \theta_{B1}, \quad (2)$$

para $a \leq x \leq L - c$:

$$-f_{11}M_{AB} + f_{12}M_{BA} = \theta_{A2}, \quad (3)$$

$$-f_{21}M_{AB} + f_{22}M_{BA} = \theta_{B2}, \quad (4)$$

para $L - c \leq x \leq L$:

$$-f_{11}M_{AB} + f_{12}M_{BA} = \theta_{A3}, \quad (5)$$

$$-f_{21}M_{AB} + f_{22}M_{BA} = \theta_{B3}. \quad (6)$$

Las vigas de la Figura 1(b) son analizadas para encontrar " θ_{Aj} " y " θ_{Bj} ", donde j toma los valores 1, 2 y 3, el principio del trabajo virtual y tomando en cuenta las deformaciones de flexión y cortante se utiliza para obtener las rotaciones.

Ahora los valores de " θ_{Aj} " y " θ_{Bj} " para los miembros no prismáticos se encuentran por las siguientes ecuaciones [7]:

$$\theta_A = \int_0^L \frac{V_x V_1}{GA_{sx}(x)} dx + \int_0^L \frac{M_x M_1}{EI_z(x)} dx, \quad (7)$$

$$\theta_B = \int_0^L \frac{V_x V_2}{GA_{sx}(x)} dx + \int_0^L \frac{M_x M_2}{EI_z(x)} dx, \quad (8)$$

donde E es el módulo de elasticidad, G es el módulo de cortante, V_x y M_x son la fuerza cortante y el momento de la carga real, V_1 y M_1 son la fuerza cortante y el momento debido al momento unitario aplicado en el apoyo "A", V_2 y M_2 son la fuerza cortante y el momento debido al momento unitario aplicado en el apoyo "B" a una distancia " x ".

Tabla 1 presenta las ecuaciones de las fuerzas cortantes y los momentos en cualquier parte de la viga sobre el eje " x " son [25].

Sustituyendo los valores de las Tablas 1 (parte 1 y parte 2) en las ecuaciones (7, 8) para obtener las rotaciones de " θ_{A1} ", " θ_{B1} ", " θ_{A2} ", " θ_{B2} ", " θ_{A3} " y " θ_{B3} ", estas se muestran de la siguiente manera:

$$\theta_{A1} = \frac{6P}{5bGL^2} \left\{ \frac{a(L-e)}{h^{1/2}u^{1/2}} \operatorname{Atan} \left(\frac{u}{h} \right)^{1/2} - \frac{aL}{h^{1/2}u^{1/2}} \operatorname{Atan} \left[\frac{(a-e)u^{1/2}}{ah^{1/2}} \right] - \frac{ce}{h^{1/2}s^{1/2}} \operatorname{Atan} \left(\frac{s}{h} \right)^{1/2} - \frac{e(L-a-c)}{h} \right\} - \frac{12P}{bEL^2} \left\{ \frac{a^2(L-e)[3u(L-a)-ah]}{8h^2u^2} \operatorname{Atan} \left(\frac{u}{h} \right)^{1/2} + \frac{c^3e(h+3s)}{8h^2s^2} \operatorname{Atan} \left(\frac{s}{h} \right)^{1/2} + \right. \quad (9)$$

$$\left. \frac{aL[a^2h-3u(a-e)(L-a)]}{8h^2u^2} \operatorname{Atan} \left[\frac{(a-e)u^{1/2}}{ah^{1/2}} \right] - \frac{a^2L(L-e)(a-e)^2}{8h^2[a^2h+u(a-e)^2]} + \frac{a^2e(L-a)}{8h^2u} - \frac{c^3e}{8h^2s} + \frac{a^2L(L-e)}{8h^2(h+u)} + \frac{e[(L-a)^3-c^3]}{3h^3} \right\},$$

$$\theta_{B1} = \frac{6P}{5bGL^2} \left\{ \frac{a(L-e)}{h^{1/2}u^{1/2}} \operatorname{Atan} \left(\frac{u}{h} \right)^{1/2} - \frac{aL}{h^{1/2}u^{1/2}} \operatorname{Atan} \left[\frac{(a-e)u^{1/2}}{ah^{1/2}} \right] - \frac{ce}{h^{1/2}s^{1/2}} \operatorname{Atan} \left(\frac{s}{h} \right)^{1/2} - \frac{e(L-a-c)}{h} \right\} + \frac{12P}{bEL^2} \left\{ \frac{a^3(L-e)(h+3u)}{8h^2u^2} \operatorname{Atan} \left(\frac{u}{h} \right)^{1/2} + \frac{c^2e[3s(L-c)-ch]}{8h^2s^2} \operatorname{Atan} \left(\frac{s}{h} \right)^{1/2} - \frac{a^2L[3u(a-e)+ah]}{8h^2u^2} \operatorname{Atan} \left[\frac{(a-e)u^{1/2}}{ah^{1/2}} \right] - \frac{a^2eL(a-e)^2}{8h^2[a^2h+u(a-e)^2]} - \frac{a^2e(L-a)}{8h^2u} + \frac{c^3e}{8h^2s} + \frac{c^2eL}{8h^2(h+u)} + \frac{e(2a^3-3a^2L+2c^3-3c^2L+L^3)}{6h^3} \right\}, \quad (10)$$

$$\theta_{A2} = \frac{6P}{5bGL^2} \left\{ \frac{a(L-e)}{h^{1/2}u^{1/2}} \operatorname{Atan} \left(\frac{u}{h} \right)^{1/2} - \frac{ce}{h^{1/2}s^{1/2}} \operatorname{Atan} \left(\frac{s}{h} \right)^{1/2} - \frac{a(L-e)-ce}{h} \right\} - \frac{12P}{bEL^2} \left\{ \frac{a^2(L-e)[3u(L-a)-ah]}{8h^2u^2} \operatorname{Atan} \left(\frac{u}{h} \right)^{1/2} + \frac{c^3e(h+3s)}{8h^2s^2} \operatorname{Atan} \left(\frac{s}{h} \right)^{1/2} + \frac{a^3(L-e)}{8h^2u} + \frac{a^2L(L-e)}{8h^2(h+u)} - \frac{c^3e}{8h^2s} + \frac{(L-e)(2a^3-3a^2L-2e^3+3e^2L)}{6h^3} + \frac{e[(L-e)^3-c^3]}{3h^3} \right\}, \quad (11)$$

$$\theta_{B2} = \frac{6P}{5bGL^2} \left\{ \frac{a(L-e)}{h^{1/2}u^{1/2}} \operatorname{Atan} \left(\frac{u}{h} \right)^{1/2} - \frac{ce}{h^{1/2}s^{1/2}} \operatorname{Atan} \left(\frac{s}{h} \right)^{1/2} - \frac{a(L-e)-ce}{h} \right\} + \frac{12P}{bEL^2} \left\{ \frac{a^3(L-e)(h+3u)}{8h^2u^2} \operatorname{Atan} \left(\frac{u}{h} \right)^{1/2} + \frac{c^2e[3s(L-c)-ch]}{8h^2s^2} \operatorname{Atan} \left(\frac{s}{h} \right)^{1/2} - \frac{a^3(L-e)}{8h^2u} + \frac{c^2eL}{8h^2(h+u)} + \frac{c^3e}{8h^2s} + \frac{e(2c^3-3c^2L+2e^3-3e^2L+L^3)}{6h^3} - \frac{(a^3-e^3)(L-e)}{3h^3} \right\}, \quad (12)$$

Los coeficientes de flexibilidades se muestran en las ecuaciones (10, 11, 12) de la parte 1.

Tabla 1. Fuerzas cortantes y momentos

Concepto		Ecuaciones		
Fuerza cortante	A la izquierda de P	$V_x = \frac{P(L - e)}{L}$	$V_1 = \frac{1}{L}$	$V_2 = \frac{1}{L}$
	A la derecha de P	$V_x = -\frac{Pe}{L}$		
Momento	A la izquierda de P	$M_x = \frac{P(L - e)x}{L}$	$M_1 = -\frac{(L - x)}{L}$	$M_2 = \frac{x}{L}$
	A la derecha de P	$M_x = \frac{Pe(L - x)}{L}$		

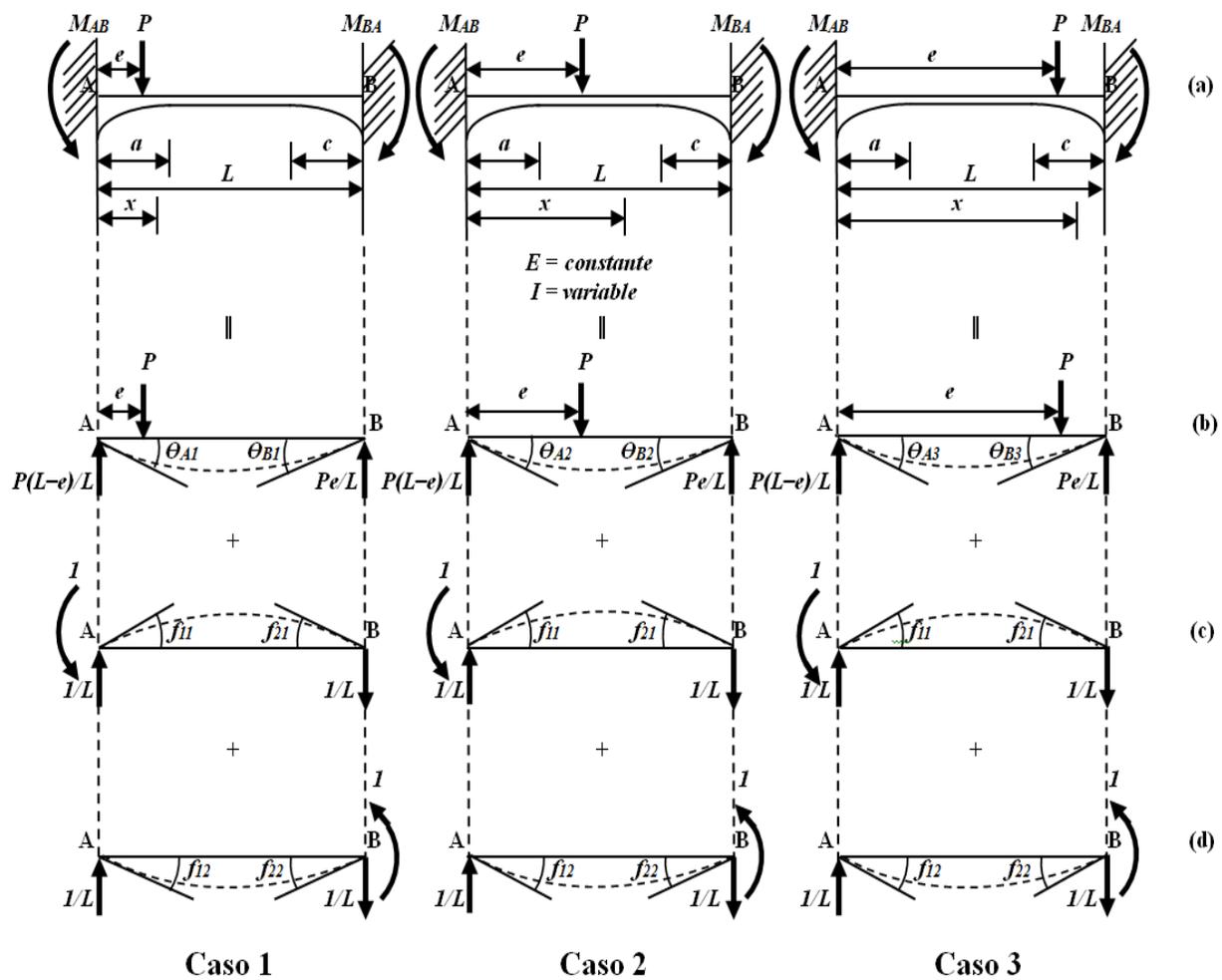


Fig. 1. Viga doblemente empotrada bajo una carga concentrada ubicada en cualquier parte de la viga: Caso 1 es cuando la carga P se localiza de $0 \leq x \leq a$. Caso 2 es cuando la carga P se encuentra de $a \leq x \leq L - c$. Caso 3 es cuando la carga P se ubica de $L - c \leq x \leq L$

$$\begin{aligned} \theta_{A3} &= \frac{6P}{5bGL^2} \left\{ \frac{a(L-e)}{h^{1/2}u^{1/2}} \operatorname{Atan} \left(\frac{u}{h} \right)^{1/2} \right. \\ &+ \frac{cL}{h^{1/2}s^{1/2}} \operatorname{Atan} \left[\frac{(c+e-L)s^{1/2}}{ch^{1/2}} \right] \\ &- \frac{ce}{h^{1/2}s^{1/2}} \operatorname{Atan} \left(\frac{s}{h} \right)^{1/2} + \frac{(L-e)(L-a-c)}{h} \left. \right\} \\ &- \frac{12P}{bEL^2} \left\{ \frac{c^3e(h+3s)}{8h^{5/2}s^{3/2}} \operatorname{Atan} \left(\frac{s}{h} \right)^{1/2} \right. \\ &- \frac{a^2(L-e)[3u(a-L)+ah]}{8h^{5/2}u^{3/2}} \operatorname{Atan} \left(\frac{u}{h} \right)^{1/2} \\ &- \frac{c^2L[3s(c+e-L)+ch]}{8h^{5/2}s^{3/2}} \operatorname{Atan} \left[\frac{(c+e-L)s^{1/2}}{ch^{1/2}} \right] \\ &+ \frac{a^3(L-e)}{8h^2u} + \frac{a^2L(L-e)}{8h^2(h+u)} - \frac{c^2(L-e)(L-c)}{8h^2s} \\ &+ \frac{(L-e)(2a^3-3a^2L+2c^3-3c^2L+L^3)}{6h^3} \\ &\left. - \frac{c^2L(L-e)(c+e-L)^2}{8h^2[s(c+e-L)^2+c^2h]} \right\} \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \theta_{B3} &= \frac{6P}{5bGL^2} \left\{ \frac{a(L-e)}{h^{1/2}u^{1/2}} \operatorname{Atan} \left(\frac{u}{h} \right)^{1/2} \right. \\ &+ \frac{cL}{h^{1/2}s^{1/2}} \operatorname{Atan} \left[\frac{(c+e-L)s^{1/2}}{ch^{1/2}} \right] \\ &- \frac{ce}{h^{1/2}s^{1/2}} \operatorname{Atan} \left(\frac{s}{h} \right)^{1/2} + \frac{(L-e)(L-a-c)}{h} \left. \right\} \\ &+ \frac{12P}{bEL^2} \left\{ \frac{a^3(L-e)(h+3u)}{8h^{5/2}u^{3/2}} \operatorname{Atan} \left(\frac{u}{h} \right)^{1/2} \right. \\ &+ \frac{c^2e[3s(L-c)-ch]}{8h^{5/2}s^{3/2}} \operatorname{Atan} \left(\frac{s}{h} \right)^{1/2} \\ &- \frac{cL[3s(L-c)(c+e-L)-c^2h]}{8h^{5/2}s^{3/2}} \operatorname{Atan} \left[\frac{(c+e-L)s^{1/2}}{ch^{1/2}} \right] \\ &- \frac{a^3(L-e)}{8h^2u} + \frac{c^2eL}{8h^2(h+s)} + \frac{c^2(L-e)(L-c)}{8h^2s} \\ &\left. - \frac{(L-e)[a^3-(L-c)^3]}{3h^3} - \frac{c^2eL(c+e-L)^2}{8h^2[s(c+e-L)^2+c^2h]} \right\} \end{aligned} \quad (14)$$

Caso 1: cuando la carga P se localiza de $0 \leq x \leq a$

La ecuación (9) y las ecuaciones (10, 12) de la parte 1 correspondientes al apoyo "A" se sustituyen en la ecuación (1), y la ecuación (10) y las ecuaciones (11, 12) de la parte 1 correspondientes al apoyo "B" se sustituyen en la ecuación (2). Subsecuentemente, las ecuaciones generadas se resuelven para obtener los valores de " M_{AB} " y " M_{BA} ". Estas se presentan como sigue:

$$M_{AB} = \frac{f_{22}\theta_{A1} - f_{12}\theta_{B1}}{(f_{12})^2 - f_{11}f_{22}}, \quad (15)$$

$$M_{BA} = \frac{f_{12}\theta_{A1} - f_{11}\theta_{B1}}{(f_{12})^2 - f_{11}f_{22}}. \quad (16)$$

Caso 2: cuando la carga P se encuentra de $a \leq x \leq L-c$

La ecuación (11) y las ecuaciones (10, 12) de la parte 1 correspondientes al apoyo "A" se sustituyen en la ecuación (3), y la ecuación (12) y las ecuaciones (11, 12) de la parte 1 correspondientes al apoyo "B" se sustituyen en la ecuación (4). Subsecuentemente, las ecuaciones generadas se resuelven para obtener los valores de " M_{AB} " y " M_{BA} ". Estas se muestran de la siguiente manera:

$$M_{AB} = \frac{f_{22}\theta_{A2} - f_{12}\theta_{B2}}{(f_{12})^2 - f_{11}f_{22}}, \quad (17)$$

$$M_{BA} = \frac{f_{12}\theta_{A2} - f_{11}\theta_{B2}}{(f_{12})^2 - f_{11}f_{22}}. \quad (18)$$

Caso 3: cuando la carga P se ubica de $L-c \leq x \leq L$

La ecuación (13) y las ecuaciones (10, 12) de la parte 1 correspondientes al apoyo "A" se sustituyen en la ecuación (5), y la ecuación (14) y las ecuaciones (11, 12) de la parte 1 correspondientes al apoyo "B" se sustituyen en la ecuación (6). Subsecuentemente, las ecuaciones generadas se resuelven para obtener los valores de " M_{AB} " y " M_{BA} ". Estas se presentan como sigue:

$$M_{AB} = \frac{f_{22}\theta_{A3} - f_{12}\theta_{B3}}{(f_{12})^2 - f_{11}f_{22}}, \quad (19)$$

$$M_{BA} = \frac{f_{12}\theta_{A3} - f_{11}\theta_{B3}}{(f_{12})^2 - f_{11}f_{22}}. \quad (20)$$

3. Validación del modelo propuesto

En las Tablas 2 y 3 se muestran los resultados de los dos modelos para los factores de los mo-

Tabla 2. Momentos de empotramiento para $h = 0.10L$

$M_{AB} = m_{ABPL}; M_{BA} = m_{BAPL}$																					
c	s/ h	e = 0.1L				e = 0.3L				e = 0.5L				e = 0.7L				e = 0.9L			
		m _{AB}		m _{BA}		m _{AB}		m _{BA}		m _{AB}		m _{BA}		m _{AB}		m _{BA}		m _{AB}		m _{BA}	
		M P	M T																		
$a = 0.2L; u/h = 1.0$																					
0.2 L	0.4	0.09 26	0.09 38	0.00 44	0.00 33	0.18 68	0.18 91	0.05 24	0.05 02	0.15 68	0.15 72	0.12 65	0.12 61	0.07 33	0.07 15	0.16 01	0.16 18	0.00 87	0.00 73	0.08 65	0.08 77
	0.6	0.09 24	0.09 37	0.00 47	0.00 35	0.18 49	0.18 72	0.05 57	0.05 35	0.15 24	0.15 27	0.13 42	0.13 39	0.06 83	0.06 63	0.16 89	0.17 08	0.00 72	0.00 58	0.08 89	0.08 02
	1.0	0.09 22	0.09 35	0.00 51	0.00 38	0.18 20	0.18 44	0.06 08	0.05 84	0.14 59	0.14 59	0.14 59	0.14 59	0.06 08	0.05 84	0.18 20	0.18 44	0.00 51	0.00 38	0.09 22	0.09 35
	1.5	0.09 20	0.09 33	0.00 55	0.00 41	0.17 95	0.18 19	0.06 53	0.06 28	0.14 02	0.13 99	0.15 61	0.15 63	0.05 44	0.05 18	0.19 33	0.19 60	0.00 37	0.00 25	0.09 45	0.09 58
	2.0	0.09 18	0.09 32	0.00 58	0.00 44	0.17 78	0.18 01	0.06 85	0.06 60	0.13 61	0.13 58	0.16 35	0.16 38	0.05 00	0.04 72	0.20 13	0.20 42	0.00 28	0.00 17	0.09 59	0.09 71
0.3 L	0.4	0.09 24	0.09 37	0.00 48	0.00 35	0.18 49	0.18 73	0.05 60	0.05 37	0.15 29	0.15 32	0.13 42	0.13 39	0.06 97	0.06 78	0.16 67	0.16 86	0.00 86	0.00 73	0.08 64	0.08 77
	0.6	0.09 22	0.09 35	0.00 52	0.00 39	0.18 22	0.18 45	0.06 11	0.05 87	0.14 67	0.14 67	0.14 56	0.14 55	0.06 31	0.06 09	0.17 86	0.18 08	0.00 71	0.00 57	0.08 89	0.08 02
	1.0	0.09 18	0.09 32	0.00 60	0.00 44	0.17 78	0.18 01	0.06 94	0.06 69	0.13 69	0.13 65	0.16 39	0.16 43	0.05 29	0.05 02	0.19 71	0.20 00	0.00 50	0.00 37	0.09 21	0.09 36
	1.5	0.09 14	0.09 29	0.00 67	0.00 50	0.17 37	0.17 60	0.07 72	0.07 46	0.12 79	0.12 72	0.18 10	0.18 19	0.04 40	0.04 10	0.21 36	0.21 70	0.00 35	0.00 23	0.09 45	0.09 59
	2.0	0.09 12	0.09 27	0.00 72	0.00 54	0.17 07	0.17 30	0.08 32	0.08 05	0.12 13	0.12 03	0.19 38	0.19 51	0.03 77	0.03 45	0.22 54	0.22 93	0.00 27	0.00 16	0.09 59	0.09 72
$a = 0.5L; u/h = 1.0$																					
0.2 L	0.4	0.09 13	0.09 28	0.00 46	0.00 34	0.20 96	0.21 27	0.04 01	0.03 78	0.20 10	0.20 23	0.10 72	0.10 62	0.10 00	0.09 79	0.14 92	0.15 07	0.01 24	0.01 04	0.08 50	0.08 65
	0.6	0.09 10	0.09 26	0.00 49	0.00 37	0.20 76	0.21 08	0.04 28	0.04 04	0.19 58	0.19 70	0.11 43	0.11 34	0.09 35	0.09 10	0.15 81	0.15 99	0.01 03	0.00 83	0.08 76	0.08 92
	1.0	0.09 07	0.09 24	0.00 54	0.00 41	0.20 45	0.20 77	0.04 71	0.04 46	0.18 80	0.18 88	0.12 52	0.12 46	0.08 36	0.08 06	0.17 15	0.17 39	0.00 75	0.00 55	0.09 12	0.09 27
	1.5	0.09 04	0.09 21	0.00 58	0.00 44	0.20 18	0.20 50	0.05 10	0.04 83	0.18 11	0.18 16	0.13 49	0.13 45	0.07 52	0.07 18	0.18 32	0.18 61	0.00 54	0.00 36	0.09 37	0.09 53
	2.0	0.09 01	0.09 19	0.00 62	0.00 47	0.19 99	0.20 31	0.05 37	0.05 10	0.17 62	0.17 65	0.14 20	0.14 17	0.06 93	0.06 56	0.19 16	0.19 47	0.00 42	0.00 24	0.09 53	0.09 68
0.5 L	0.4	0.09 08	0.09 24	0.00 55	0.00 41	0.20 54	0.20 87	0.04 88	0.04 42	0.19 12	0.19 25	0.12 16	0.12 05	0.09 17	0.08 96	0.15 80	0.15 98	0.01 26	0.01 06	0.08 37	0.08 53
	0.6	0.09 02	0.09 20	0.00 63	0.00 47	0.20 12	0.20 45	0.05 35	0.05 06	0.18 11	0.18 20	0.13 67	0.13 60	0.08 16	0.07 91	0.17 16	0.17 39	0.01 06	0.00 86	0.08 60	0.08 78
	1.0	0.08 93	0.09 13	0.00 79	0.00 59	0.19 37	0.19 70	0.06 59	0.06 26	0.16 39	0.16 39	0.16 39	0.16 39	0.06 59	0.06 26	0.19 37	0.19 70	0.00 79	0.00 59	0.08 93	0.08 13
	1.5	0.08 83	0.09 05	0.00 96	0.00 72	0.18 60	0.18 91	0.07 94	0.07 59	0.14 66	0.14 56	0.19 27	0.19 39	0.05 20	0.04 79	0.21 43	0.21 87	0.00 58	0.00 39	0.09 19	0.09 40
	2.0	0.08 75	0.08 99	0.01 12	0.00 84	0.17 95	0.18 25	0.09 12	0.08 77	0.13 29	0.13 07	0.21 68	0.21 93	0.04 21	0.03 76	0.22 94	0.23 48	0.00 46	0.00 27	0.09 35	0.09 57

Tabla 3. Momentos de empotramiento para $h = 0.20L$

		$M_{AB} = m_{AB}PL; M_{BA} = m_{BA}PL$																			
c	s/h	e = 0.1L				e = 0.3L				e = 0.5L				e = 0.7L				e = 0.9L			
		m_{AB}		m_{BA}		m_{AB}		m_{BA}		m_{AB}		m_{BA}		m_{AB}		m_{BA}		m_{AB}		m_{BA}	
		MP	MT	MP	MT	MP	MT	MP	MT	MP	MT	MP	MT	MP	MT	MP	MT	MP	MT	MP	MT
$a = 0.2L; u/h = 1.0$																					
0.2L	0.	0.08	0.09	0.00	0.00	0.18	0.18	0.05	0.05	0.15	0.15	0.12	0.12	0.07	0.07	0.15	0.16	0.01	0.00	0.08	0.08
	4	95	38	73	33	08	91	79	02	58	72	75	61	79	15	58	18	23	73	32	77
0.6	0.	0.08	0.09	0.00	0.00	0.17	0.18	0.06	0.05	0.15	0.15	0.13	0.13	0.07	0.06	0.16	0.17	0.01	0.00	0.08	0.09
	6	92	37	78	35	89	72	14	35	18	27	48	39	34	63	39	08	07	58	56	02
1.0	0.	0.08	0.09	0.00	0.00	0.17	0.18	0.06	0.05	0.14	0.14	0.14	0.14	0.06	0.05	0.17	0.18	0.00	0.00	0.08	0.09
	0	89	35	85	38	61	44	67	84	59	59	59	59	67	84	61	44	85	38	89	35
1.5	0.	0.08	0.09	0.00	0.00	0.17	0.18	0.07	0.06	0.14	0.13	0.15	0.15	0.06	0.05	0.18	0.19	0.00	0.00	0.09	0.09
	5	86	33	91	41	37	19	14	28	07	99	55	63	09	18	66	60	67	25	14	58
2.0	0.	0.08	0.09	0.00	0.00	0.17	0.18	0.07	0.06	0.13	0.13	0.16	0.16	0.05	0.04	0.19	0.20	0.00	0.00	0.09	0.09
	0	83	32	95	44	19	01	47	60	70	58	25	38	69	72	39	42	56	17	29	71
0.3L	0.	0.08	0.09	0.00	0.00	0.17	0.18	0.06	0.05	0.15	0.15	0.13	0.13	0.07	0.06	0.16	0.16	0.01	0.00	0.08	0.08
	4	92	37	79	35	89	73	18	37	22	32	49	39	45	78	21	86	21	73	30	77
0.6	0.	0.08	0.09	0.00	0.00	0.17	0.18	0.06	0.05	0.14	0.14	0.14	0.14	0.06	0.06	0.17	0.18	0.01	0.00	0.08	0.09
	6	89	35	86	39	62	45	71	87	66	67	57	55	86	09	30	08	05	57	54	02
1.0	0.	0.08	0.09	0.00	0.00	0.17	0.18	0.07	0.06	0.13	0.13	0.16	0.16	0.05	0.05	0.19	0.20	0.00	0.00	0.08	0.09
	0	83	32	98	44	19	01	57	69	78	65	29	43	94	02	00	00	83	37	86	36
1.5	0.	0.08	0.09	0.01	0.00	0.16	0.17	0.08	0.07	0.12	0.12	0.17	0.18	0.05	0.04	0.20	0.21	0.00	0.00	0.09	0.09
	5	78	29	09	50	80	60	38	46	98	72	88	19	14	10	51	70	65	23	11	59
2.0	0.	0.08	0.09	0.01	0.00	0.16	0.17	0.08	0.08	0.12	0.12	0.19	0.19	0.04	0.03	0.21	0.22	0.00	0.00	0.09	0.09
	0	74	27	17	54	51	30	98	05	40	03	07	51	57	45	60	93	54	16	27	72
$a = 0.5L; u/h = 1.0$																					
0.2L	0.	0.08	0.09	0.00	0.00	0.20	0.21	0.04	0.03	0.19	0.20	0.10	0.10	0.10	0.09	0.14	0.15	0.01	0.01	0.08	0.08
	4	75	28	74	34	19	27	58	78	76	23	97	62	52	79	53	07	74	04	13	65
0.6	0.	0.08	0.09	0.00	0.00	0.19	0.21	0.04	0.04	0.19	0.19	0.11	0.11	0.09	0.09	0.15	0.15	0.01	0.00	0.08	0.08
	6	71	26	79	37	99	08	87	04	30	70	65	34	95	10	34	99	53	83	38	92
1.0	0.	0.08	0.09	0.00	0.00	0.19	0.20	0.05	0.04	0.18	0.18	0.12	0.12	0.09	0.08	0.16	0.17	0.01	0.00	0.08	0.09
	0	66	24	86	41	69	77	33	46	60	88	68	46	09	06	57	39	22	55	74	27
1.5	0.	0.08	0.09	0.00	0.00	0.19	0.20	0.05	0.04	0.17	0.18	0.13	0.13	0.08	0.07	0.17	0.18	0.00	0.00	0.09	0.09
	5	62	21	93	44	42	50	73	83	98	16	60	45	35	18	64	61	99	36	01	53
2.0	0.	0.08	0.09	0.00	0.00	0.19	0.20	0.06	0.05	0.17	0.17	0.14	0.14	0.07	0.06	0.18	0.19	0.00	0.00	0.09	0.09
	0	59	19	98	47	23	31	02	10	55	65	26	17	82	56	40	47	83	24	18	68
0.5L	0.	0.08	0.09	0.00	0.00	0.19	0.20	0.05	0.04	0.18	0.19	0.12	0.12	0.09	0.08	0.15	0.15	0.01	0.01	0.07	0.08
	4	67	24	88	41	75	87	34	42	82	25	41	05	68	96	38	98	74	06	97	53
0.6	0.	0.08	0.09	0.01	0.00	0.19	0.20	0.06	0.05	0.17	0.18	0.13	0.13	0.08	0.07	0.16	0.17	0.01	0.00	0.08	0.08
	6	60	20	01	47	34	45	06	06	91	20	85	60	76	91	62	39	53	86	18	78
1.0	0.	0.08	0.09	0.01	0.00	0.18	0.19	0.07	0.06	0.16	0.16	0.16	0.16	0.07	0.06	0.18	0.19	0.01	0.00	0.08	0.09
	0	47	13	24	59	62	70	34	26	39	39	39	39	34	26	62	70	24	59	47	13
1.5	0.	0.08	0.09	0.01	0.00	0.17	0.18	0.08	0.07	0.14	0.14	0.19	0.19	0.06	0.04	0.20	0.21	0.01	0.00	0.08	0.09
	5	35	05	50	72	89	91	71	59	90	56	01	39	09	79	45	87	01	39	71	40
2.0	0.	0.08	0.08	0.01	0.00	0.17	0.18	0.09	0.08	0.13	0.13	0.21	0.21	0.05	0.03	0.21	0.23	0.00	0.00	0.08	0.09
	0	24	99	72	84	31	25	87	77	74	07	15	93	20	76	78	48	87	27	87	57

mentos de empotramiento (m_{AB} y m_{BA}) para una trabe sometida a una carga concentrada ubicada en cualquier lugar de la viga, el modelo propuesto (MP) es el modelo matemático presentado en este

documento, donde las deformaciones por flexión y cortante se consideran, y el modelo tradicional (MT) toma en cuenta solo las deformaciones por flexión.

La Tabla 2 presenta los factores para una proporción de $h = 0.10L$, y la Tabla 3 muestra los factores para una relación de $h = 0.20L$. Estas comparaciones se realizaron con $G = 5E/12$ para concreto, $a = 0.2L$ y $u/h = 1.0$, y para $a = 0.5L$ y $u/h = 1.0$, debido a que estos valores se presentan en las Tablas de la página 516 del libro de Hibbeler [19]. Los resultados que muestran las Tablas de Hibbeler es el modelo tradicional que considera las deformaciones por flexión, y el modelo propuesto toma en cuenta las deformaciones por flexión y cortante.

Otra manera para validar el modelo propuesto es como sigue: Para $0 \leq x \leq a$ se sustituye " $u = 0h$ y $s = 0h$ " o " $a = L, c = 0L$ y $u = 0h$ " en las ecuaciones (15) y (16). Para $a \leq x \leq L - c$ se sustituye " $a = 0L$ y $c = 0L$ " o " $u = 0h$ y $s = 0h$ " en las ecuaciones (17) y (18). Para $L - c \leq x \leq L$ se sustituye " $u = 0h$ y $s = 0h$ " o " $a = 0L, c = L$ y $s = 0h$ " en las ecuaciones (19) y (20).

Para estas condiciones se desprecian las deformaciones por cortante. Los resultados obtenidos para los tres casos, los momentos de empotramiento son: " $M_{AB} = Pe(L-e)^2/L^2$ " y " $M_{BA} = Pe^2(L-e)/L^2$ ". Los valores presentados anteriormente corresponden a una sección transversal constante.

Una manera de validar la continuidad de la sección transversal es la siguiente: la carga se coloca sobre los puntos " $x = a$ " y " $x = L - c$ " y usando las ecuaciones correspondientes se obtienen los mismos resultados en los momentos de empotramiento.

Por ejemplo, en las ecuaciones (15, 17) se sustituye el valor de " $e = a$ " para obtener " M_{AB} " y en las ecuaciones (16, 18) para encontrar " M_{BA} ", es decir, la carga concentrada se coloca sobre la unión del primero con el segundo tramo de la viga, y en las ecuaciones (17, 19) se sustituye " $e = L - c$ " para encontrar " M_{AB} ", y también en las ecuaciones (18, 20) para obtener " M_{BA} ", es decir, la carga concentrada se coloca sobre la unión del segundo con el tercer tramo de la viga.

Entonces el modelo propuesto en este documento es válido y no se limita para ciertas dimensiones o proporciones como algunos autores muestran, y también las deformaciones por flexión y cortante son consideradas.

4. Resultados

Tal como se aprecia en las Tablas 2 y 3, los factores en los momentos de empotramiento se vieron influenciados por el volumen de las cartelas en los extremos (volumen de la cartela A es $abu/3$, y el volumen de la cartela B es $cbs/3$). A medida que se incrementa el volumen de las cartelas en el extremo "B" se observa un aumento en estos factores para el mismo apoyo y en el extremo "A" que es el apoyo opuesto se produce una disminución, esto es para los dos modelos.

Ahora de acuerdo a la comparación de ambos modelos, cuando el volumen de las cartelas es mayor en un extremo se presenta un factor mayor en los momentos de empotramiento de este apoyo para el modelo tradicional y para el extremo opuesto el mayor es el modelo propuesto.

También se observa que cuando la carga concentrada se encuentra más cerca de alguno de los apoyos la diferencia entre ambos modelos es mayor. Además, cuando las cartelas y las cargas son simétricas no se afectan los momentos de empotramiento para los dos modelos. La mayor diferencia existe para " $h = 0.2L$ ", " $a = 0.5L$ ", " $c = 0.2L$ ", " $u = h$ ", " $s = 2h$ " y " $e = 0.9L$ " en el apoyo "A" de 3.46 veces, y para " $h = 0.2L$ ", " $a = 0.2L$ ", " $c = 0.3L$ ", " $u = h$ ", " $s = 0.4h$ " y " $e = 0.1L$ " en el apoyo "B" de 2.26 veces, siendo mayor el modelo propuesto para ambos casos con respecto al modelo tradicional.

5. Conclusiones

En el presente trabajo se ha presentado una metodología analítica para traveses de sección transversal rectangular con cartelas parabólicas (simétricas o no simétricas) sometidas a una carga concentrada localizada en cualquier parte de la viga tomando en cuenta las deformaciones por flexión y cortante, que ha permitido determinar con precisión los factores para momentos de empotramiento. Las propiedades de la sección transversal de la viga: el ancho " b " es constante y la altura " h " varía a lo largo de la viga en tres partes diferentes, con variación en los tramos extremos de tipo parabólico y el tramo central recto. Las ecuaciones de compatibilidad y equilibrio se utilizaron para resolver este tipo de problema, y los

giros en los extremos de la viga se encontraron por medio del principio del trabajo virtual empleando la integraci3n exacta para obtener los factores para momentos de empotramiento.

Los modelos tradicionales consideran 3nicamente las deformaciones por flexi3n y otros autores presentan tablas que se encuentran restringidas para ciertas proporciones.

Tal como se aprecia en los resultados, los factores para momentos de empotramiento se vieron influenciados por las deformaciones de cortante. Las diferencias mayores se presentan para claros cortos.

En cualquier tipo de estructura las fuerzas cortantes y los momentos flexionantes est3n presentes; por lo tanto, aparecen las deformaciones de flexi3n y cortante. Entonces, el modelo propuesto que considera las deformaciones por flexi3n y cortante es m3s apropiado para el an3lisis estructural y tambi3n se ajusta m3s a las condiciones reales con respecto al modelo tradicional que toma en cuenta las deformaciones por flexi3n 3nicamente.

La aplicaci3n significativa de los momentos de empotramiento y las rigideces de un miembro es en los m3todos matriciales de an3lisis estructural. Los momentos de empotramiento, el factor de transporte y el factor rigidez se utilizan en el m3todo de distribuci3n de momentos (M3todo de Hardy Cross).

Adem3s, una ventaja significativa es que se pueden generar un gran n3mero de Tablas para diferentes valores de "G", "e" y proporciones de "a/L", "c/L", "h/L", "u/h" y "s/h" con ayuda de alg3n tipo de software. Las sugerencias para investigaciones futuras: 1) Cuando el miembro presenta otro tipo de secci3n transversal; 2) Cuando el miembro tiene otro tipo de configuraci3n.

Agradecimientos

La investigaci3n descrita en este trabajo fue financiada por el Instituto de Investigaciones Multidisciplinarias de la Facultad de Contabilidad y Administraci3n de la Universidad Aut3noma de Coahuila. Los autores tambi3n agradecen a los revisores y al editor por los comentarios y sugerencias para mejorar la presentaci3n. El

estudiante de doctorado Ricardo Sandoval Rivas (CVU/Becario: 715547/590923) agradece al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnolog3a (CONACYT) el apoyo econ3mico.

Referencias

1. **Guldan, R. (1956).** *Estructuras aporticadas y vigas continuas.*
2. **Portland Cement Association (1958).** *Handbook of frame constants: Beam factors and moment coefficients for members of variable section.* Chicago: Portland Cement Association.
3. **Just, D.J. (1977).** Plane frameworks of tapering box and I-section. *Journal of Structural Engineering ASCE*, Vol. 103, No. 1, pp. 71–86.
4. **Schreyer, H.L. (1978).** Elementary theory for linearly tapered beams. *Journal of the Engineering Mechanics ASCE*, Vol. 104, No. 3, pp. 515–527.
5. **Medwadowski, S.J. (1984).** Nonprismatic shear beams. *Journal of Structural Engineering ASCE*, Vol. 110, No. 5, pp. 1067–182. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9445(1984)110:5(1067).
6. **Brown, C.J. (1984).** Approximate stiffness matrix for tapered beams. *Journal of Structural Engineering ASCE*, Vol. 110, No. 12, pp. 3050–3055. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9445(1984)110:12(3050).
7. **Tena-Colunga, A. (2007).** *An3lisis de estructuras con m3todos matriciales.*
8. **Shooshtari, A. & Khajavi, R. (2010).** An efficient procedure to find shape functions and stiffness matrices of nonprismatic Euler-Bernoulli and Timoshenko beam elements. *European Journal of Mechanics- A/Solids*, Vol. 29, No. 5, pp. 826–836. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2010.04.003.
9. **Yuksel, S.B. (2012).** Assessment of non-prismatic beams having symmetrical parabolic haunches with constant haunch length ratio of 0.5. *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 42, No. 6, pp. 849–866. DOI: 10.12989/sem.2012.42.6.849.
10. **Lu3vanos-Rojas, A. (2012).** A mathematical model for rectangular beams of variable cross section of symmetrical parabolic shape for uniformly distributed load. *Far East Journal of Mathematical Sciences*, Vol. 80, No. 2, pp. 197–230.
11. **Lu3vanos-Rojas, A. (2013).** Mechanical Elements of Rectangular Nonprismatic Members for Symmetrical Parabolic Haunches Subjected to a Uniformly Distributed Load. *Journal Architectural Engineering Technology*, Vol. 2, No. 2, pp. 1–8. DOI: 10.4172/2168-9717.1000111.

12. **Luévanos-Rojas, A. & Montoya-Ramírez, J. (2014).** Mathematical model for rectangular beams of variable cross section of symmetrical linear shape for uniformly distributed load. *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, Vol. 10, No. 2, pp. 545–564.
13. **Luévanos-Rojas, A., Luévanos-Rojas, R., Luévanos-Soto, I., Luévanos-Vázquez, R.G., & Ramírez-Luévanos, O.A. (2014).** Mathematical Model for Rectangular Beams of Variable Cross Section of Symmetrical Linear Shape for Concentrated Load. *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, Vol. 10, No. 3, pp. 851–881.
14. **Luévanos-Rojas, A. (2014).** A mathematical model for fixed-end moments for two types of loads for a parabolic shaped variable rectangular cross section. *Ingeniería e Investigación*, Vol. 34, No. 2, 17–22. DOI: 10.15446/ing.investig.v34n2.44705.
15. **Luévanos-Rojas, A. (2015).** Modelado para vigas de sección transversal “I” sometidas a una carga uniformemente distribuida con cartelas rectas. *Ingeniería Mecánica Tecnología y Desarrollo*, Vol. 5, No. 2, pp. 281–292.
16. **Luévanos-Soto, I. & Luévanos-Rojas, A. (2017).** Modeling for fixed-end moments of I-sections with straight haunches under concentrated load. *Steel and Composite Structures*, Vol. 23, No. 5, pp. 597–610. DOI: 10.12989/scs.2017.23.5.597.
17. **Luévanos-Rojas, A., López-Chavarría, S., & Medina-Elizondo, M. (2016).** Modeling for mechanical elements of rectangular members with straight haunches using software: part 1. *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, Vol. 12, No. 3, pp. 973–985.
18. **Luévanos-Rojas, A., López-Chavarría, S., & Medina-Elizondo, M. (2016).** Modeling for mechanical elements of rectangular members with straight haunches using software: part 2. *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, Vol. 12, No. 4, pp. 1027–1041.
19. **Hibbeler, R.C. (2006).** *Structural analysis*. New Jersey: Prentice-Hall, Inc.
20. **Vaidyanathan, R. & Perumal, P. (2006).** *Structural Analysis*. New Delhi: Laxmi Publications (P) LTD.
21. **Williams, A. (2009).** *Structural Analysis: In Theory and Practice*. New York: Butterworth Heinemann.
22. **McCormac, J.C. (2007).** *Structural Analysis: using classical and matrix methods*. New York: John Wiley & Sons.
23. **Ghali, A., Neville, A.M., & Brown, T.G. (2003).** *Structural Analysis: A Unified Classical and Matrix Approach*. New York: Taylor & Francis.
24. **González-Cuevas, O.M. (2007).** *Análisis Estructural*. México: Limusa.
25. **Gere, J.M. & Goodo, B.J. (2009).** *Mechanics of Materials*. New York: Cengage Learning.

Article received on 02/01/2018; accepted on 08/01/2019.
Corresponding author is Arnulfo Luévanos Rojas.